This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

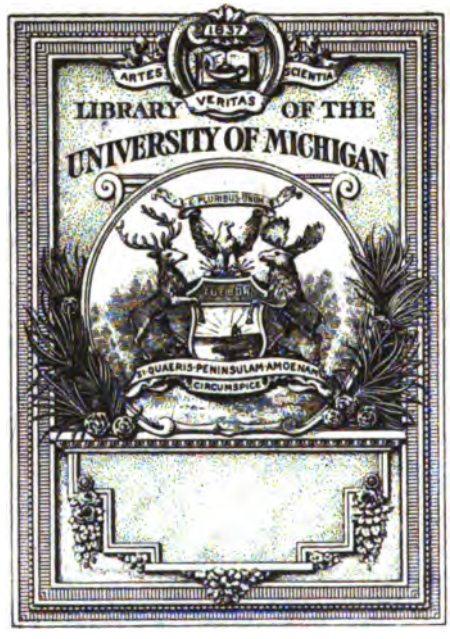
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 444376


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

HF
5695
.T453
F5
1878

THÉORIE

DES

INTÉRÊTS COMPOSÉS

ET DES

ANNUITÉS.

17428

THÉORIE

DES

INTÉRÊTS COMPOSÉS

ET DES

ANNUITÉS,

SUIVIE DE

TABLES LOGARITHMIQUES,

PAR FÉDOR THOMAN.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

OUVRAGE TRADUIT DE L'ANGLAIS,

PAR M. L'ABBÉ BOUCHARD

ET

PRÉCÉDÉ D'UN AVERTISSEMENT

DE

M. J. BERTRAND,

Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1878

(Tous droits réservés.)

A M. LÉON SAY,

SÉNATEUR, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES MORALES ET POLITIQUES,
MINISTRE DES FINANCES, ETC., ETC.

MONSIEUR LE MINISTRE,

Votre Excellence a bien voulu me permettre de présenter au public, sous ses auspices, cette traduction française d'un Ouvrage anglais de FÉDOR THOMAN, *sur les* Intérêts composés et les Annuités.

Ce Traité étant la source où ont puisé la plupart des auteurs qui ont écrit de nos jours sur les opérations financières, il importait de le faire connaître dans notre langue aux calculateurs de notre pays.

En favorisant la publication en France de cet Ouvrage, Votre Excellence s'associe à un hommage bien mérité, rendu à la mémoire de son savant auteur.

J'ai l'honneur, Monsieur le Ministre, d'offrir à Votre Excellence l'expression de la plus respectueuse reconnaissance de

Son très-humble serviteur,

L'ABBÉ BOUCHARD.

Paris, le 8 février 1878.

174 t

AVERTISSEMENT.

Les amis de Fédor Thoman savent combien peu il recherchait la renommée et le succès. Très-habile géomètre et familiarisé avec les théories les plus élevées, il se laissait prendre volontiers pour un simple calculateur, supérieur seulement par la rapidité et la sûreté de ses opérations logarithmiques. Thoman cependant avait reçu une éducation brillante, solide et extrêmement variée : écrivant et parlant presque toutes les langues de l'Europe, il n'était étranger à aucune science, et son érudition imprévue a étonné plus d'une fois ceux qui, le connaissant depuis longtemps, découvraient tout à coup, sur un terrain nouveau, la sûreté tout ensemble et la vaste étendue de son savoir.

Lorsque les circonstances lui imposèrent à l'improviste la nécessité d'utiliser pour vivre une instruction acquise pour satisfaire sa curiosité et orner son esprit, Fédor Thoman mit d'abord en défiance les amis les plus disposés à le servir, en leur disant, de l'air le plus simple, qu'il désirait trouver des élèves et leur enseigner tout ce qu'ils voudraient apprendre, dans les lettres, dans les langues vivantes, en Histoire et en Géographie, dans les sciences mathématiques et physiques. Il n'exagérait rien cependant, et Thoman, sur tous ces sujets, pouvait donner de bonnes et sérieuses leçons.

Il rencontrait toutefois, pour chaque genre d'études, des concurrents mieux préparés à l'enseignement, et ne se faisait connaître que lentement. Pour l'exécution des calculs numériques, la connaissance des théories arithmétiques et le choix des formules résolvant les problèmes les plus complexes, il se montra, au contraire, tellement supérieur, que dans le monde financier, à l'étranger aussi bien qu'en France, dans les administrations publiques comme dans les bureaux des banquiers, il acquit rapidement la confiance de tous. Malgré sa merveilleuse facilité et en y consacrant tout son temps, il lui fut impossible bientôt de rendre tous les services qu'on sollicitait de lui.

L'Ouvrage que l'on publie aujourd'hui est le résumé de ce labeur sans cesse renaissant qui semblait lui plaire plus qu'aucun autre; il offre à tous, en entrant dans les plus minutieux détails, le fruit précieux de sa longue expérience.

La première édition a été écrite dans la langue anglaise et imprimée à Cambridge aux frais de l'Université (*); elle a obtenu tout le succès auquel puisse prétendre un ouvrage de ce genre, celui d'être employé par les hommes pratiques et d'être recherché comme un guide précieux, presque indispensable, pour leurs opérations de chaque jour.

M. Gauthier-Villars, en donnant au public français la traduction de M. l'abbé Bouchard, rend un véritable service aux calculateurs de notre pays, dont bien peu jusqu'ici ont eu l'occasion de connaître l'édition originale.

Après avoir donné, sous une forme nette et précise, en y joignant leur démonstration, les formules qui résolvent tous

---

(*) *Theory of compound interest and annuities with logarithmic Tables*, by Fedor Thoman. London, John Weale, 59, High Holborn; 1859 (Cambridge : Printed by C. Clay M. A. at the University press).

les problèmes rencontrés par lui dans sa longue pratique de calculateur des opérations financières, Fédor Thoman les éclaircit par de nombreux exemples, et en simplifie l'emploi de manière à faire disparaître souvent tout travail, par le moyen de deux Tables dont l'usage, très-facile et très-clair, permet de résoudre un grand nombre de problèmes en apparence complétement distincts.

En présence de ces pages si simples et si nettes, plus de détails seraient inutiles. Thoman a écrit pour les hommes pratiques. Mieux que personne il connaissait leurs besoins et savait se mettre à leur portée. Si quelques-uns d'entre eux, un peu brouillés avec l'Algèbre, trouvent au début quelque difficulté dans l'emploi d'une langue qui ne leur est plus familière, ils peuvent être assurés qu'un peu de persévérance la fera bientôt disparaître, et ils trouveront, pour leur tâche quelle qu'elle soit, un secours aussi sûr que judicieux et simple.

J. BERTRAND.

EXTRAIT

DE LA

PRÉFACE DE L'ÉDITION ANGLAISE.

La pratique plus étendue des Logarithmes offre des avantages trop évidents pour qu'il soit nécessaire d'en faire une mention spéciale. Les Tables logarithmiques abrégent et facilitent tous les calculs numériques, quelque longs et difficiles qu'ils soient; elles écartent, en outre, les nombreuses chances d'erreur qu'engendrent de fatigantes opérations numériques et des Tables numériques inexactes. C'est surtout par rapport aux questions d'Intérêts composés et d'Annuités, aux solutions desquelles il est indispensable de donner toute l'exactitude désirable, qu'apparaît clairement la grande supériorité du calcul logarithmique. Il y a, d'ailleurs, un grand nombre de cas, se rattachant aux placements pécuniaires, qu'on ne peut résoudre d'une manière satisfaisante qu'à l'aide des logarithmes.

La grande expérience acquise en matière de finance par l'auteur du présent Ouvrage, qui, durant plusieurs années, a aidé de ses conseils une des plus grandes Compagnies financières, et son habileté à effectuer les plus difficiles calculs, fruit d'une longue pratique, l'ont déterminé à réunir les renseignements relatifs aux logarithmes, recueillis par

les auteurs qui l'ont précédé, et à dresser des Tables logarithmiques, accomplissant ainsi une œuvre qui pourrait être, pour notre pays, de la plus grande utilité et de la plus haute importance. Les prodigieuses transactions financières dont l'univers entier est maintenant le théâtre, de la part des particuliers comme de la part des Compagnies ou des gouvernements, ont rendu spécialement nécessaires à notre époque les renseignements que M. Thoman nous communique dans sa Théorie. Tout d'abord, son Introduction était destinée à être purement la clef des Tables dont il la faisait suivre; mais le nombre considérable et la variété des cas impliqués dans le calcul, comme aussi l'importance financière de certains problèmes auxquels on ne s'était pas encore arrêté, ont conduit l'auteur dans un vaste champ de recherches et l'ont engagé à écrire cette Théorie mathématique qui, pour être nouvelle, n'en est pas moins complète.

La méthode concise, suivie dans le développement de cette Théorie, a été du plus grand secours pour convertir la doctrine des Annuités en un système simple, régulier et uniforme. En outre, comme le but du présent Ouvrage est avant tout pratique, M. Thoman a représenté avec soin les théorèmes et les règles par les formules les plus intelligibles et les plus élégantes, adaptées aux calculs logarithmiques et rendant très-facile la solution des problèmes les plus compliqués.

La Théorie de M. Thoman peut se diviser naturellement en deux Parties distinctes : la première, relative aux payements ou placements uniques; la seconde, aux payements ou placements périodiques. Ainsi la première Partie comprend :

1° *Le montant d'une somme quelconque, augmentée de ses Intérêts composés à la fin d'un temps donné;* 2° *la valeur actuelle d'une somme quelconque, payable à une époque donnée.*

La seconde Partie renferme la nouvelle théorie des Annuités, que l'on divise naturellement en trois espèces distinctes, suivant que le dividende court *depuis, avant* ou *après* le temps d'achat. Les Annuités de la première sorte s'appellent *immédiates;* celles de la seconde, *différées* ou *réversions*. Quant aux Annuités de la troisième espèce, pour lesquelles l'*entrée* n'est ni immédiate ni différée, mais *passée*, l'auteur leur a donné le nom d'*Annuités avec entrée passée*.

La troisième Partie de l'Introduction contient la théorie et le mécanisme des *Obligations*, remboursables au moyen de tirages, constituant des annuités constantes et cotées à la Bourse comme les autres Fonds publics.

Ces obligations, constituant le mode d'emprunt le plus usité de nos jours, méritaient un Chapitre spécial.

Dans la cinquième Partie, qui traite des Annuités *avec entrée passée*, l'auteur a eu soin d'insister sur la différence entre le montant des Annuités arriérées et le montant des Placements annuels, que jusqu'alors on avait confondus.

Les résultats divers que l'on obtient, suivant les différents termes fixés pour le payement des Annuités et de l'Intérêt, ont été présentés avec précision dans le cours de l'Ouvrage. Lorsque les termes pour le payement de l'Annuité et de l'Intérêt ne coïncident pas, la formule connue jusqu'ici était si mal appropriée aux calculs numériques que, même avec des logarithmes à 7 décimales, on ne pouvait assurer que 4 ou 5 chiffres vrais dans le résultat; par suite de cette difficulté, on fut amené à négliger la différence entre les termes pour le payement de l'annuité et de l'intérêt, et la solution était alors plus ou moins erronée. M. Thoman a fait disparaître cette source d'erreur en donnant dans une petite Table (Table IV) les logarithmes à 7 décimales que l'on doit ajouter

au logarithme de l'annuité ou que l'on doit en retrancher pour obtenir une solution rigoureusement vraie.

Avant tout, la Théorie que nous offrons au public n'est pas seulement nouvelle dans le plus grand nombre de ses points : elle est de plus complète en ce qui regarde la question mathématique, et expliquée, avec des renvois aux Tables, par plus de 150 problèmes qui, malgré leur nombre, sont tout à fait distincts les uns des autres, et ont reçu la meilleure forme de développement. Ces exemples, choisis au milieu d'une immense variété d'applications, sont d'autant plus précieux, qu'ils se sont rencontrés dans la pratique, et leurs solutions, pour être exactes, n'ont pas exigé peu de travail. Ils peuvent servir de modèles pour la solution de toutes les questions du même genre.

Les progrès de la théorie n'auraient que de faibles résultats s'il n'y avait pas des moyens faciles de les utiliser dans la pratique : c'est pourquoi on a calculé des Tables contenant les quantités qui entrent dans les formules algébriques. Ces Tables étaient comme le complément naturel de la théorie: elles donnent des résultats exacts au lieu de ces valeurs approchées dont on ne pouvait faire usage dans un grand nombre de cas.

Nos Tables contiennent près de 11 000 logarithmes à 7 ou 10 décimales, applicables à 48 taux, de $\frac{1}{2}$ à 12 pour 100, entre 1 et 100 ans. Les taux se succédant de huitième en huitième de $\frac{1}{2}$ à 6 pour 100, les premières différences sont à peu près constantes, de telle sorte qu'il est très-facile de faire des interpolations pour chaque taux intermédiaire. Pour donner à ces Tables la plus grande exactitude possible, on a calculé tous les logarithmes, aussi nombreux qu'ils sont, avec 10 et 13 décimales, au moyen de deux ou trois procédés différents.

La première colonne de chaque page de la Table I donne directement :

1° *Le logarithme du montant de* 1 *franc à la fin d'un nombre quelconque d'années;*

2° *La valeur actuelle de* 1 *franc payable à une époque donnée.*

La seconde colonne donne :

3° *L'annuité par laquelle on peut amortir un capital de* 1 *franc;*

4° *La valeur actuelle d'un certain nombre d'annuités de* 1 *franc.*

En combinant les deux colonnes, on obtient :

5° *Le montant d'une annuité arriérée;*

6° *L'annuité arriérée dont le montant s'élève à* 1 *franc;*

7° *L'amortissement;*

8° *Le montant des placements annuels;*

9° *La somme qui, placée au commencement de chaque année, s'élève à* 1 *franc;*

10° *La valeur actuelle d'une annuité différée;*

11° *L'annuité différée par laquelle on amortit un capital de* 1 *franc.*

La seconde Table et la troisième complètent la première : la seconde, pour des fractions d'année, et la troisième pour les taux qui ne sont pas compris dans la Table I.

La Table IV présente les logarithmes des annuités, lorsque l'intérêt et l'annuité ne se payent pas aux mêmes époques.

Ces quatre Tables, que leur Auteur a lui-même appliquées pendant plusieurs années avec succès et sur une grande échelle, comprennent le système complet des calculs relatifs à l'importante question des placements financiers; et, sans nul doute, elles sont destinées à remplacer les Tables numé-

riques, quelles qu'elles soient. Il suffit d'un simple fait pour convaincre de l'insuffisance de ces dernières, comparées aux Tables logarithmiques que nous offrons au public. Pour donner directement les mêmes solutions que les Tables logarithmiques I et II combinées, les Tables numériques pour les annuités différées ne doivent pas contenir moins de 5 760 000 nombres différents (*).

L'ÉDITEUR.

59, High Holborn.

(*) Cette nouvelle édition contient des Tables encore inédites, dressées de la main même de Fédor Thoman.

La Table I de l'édition anglaise ne donne les logarithmes du montant de 1fr l'annuité capable d'amortir un capital de 1fr que pour des périodes de temps inférieures à 100 ans; mais on peut avoir besoin de connaître ces mêmes logarithmes pour des périodes comprises entre 100 et 200 ans, surtout lorsqu'il s'agit du calcul d'annuités où l'intérêt et l'amortissement se payent par semestre, par trimestre ou par mois. Un supplément de 4 pages, faisant suite à la Table I, présente ces logarithmes pour les taux 2, 2 $\frac{1}{4}$, 2 $\frac{1}{2}$ et 3 pour 100, et pour des périodes de temps comprises entre 100 et 200 ans.

La Table V contient les logarithmes des logarithmes des nombres naturels de 1 à 100.

Les Tables VI et VII complètent les trois premières Tables.

Enfin les trois Tables de logarithmes à 11 décimales servent à calculer le logarithme d'un nombre donné, ou le nombre correspondant à un logarithme donné, jusqu'à 10 chiffres exacts. Un supplément de quelques pages, placé à la fin de l'Ouvrage, sous le titre *Tables de logarithmes à 11 décimales*, indique la manière de se servir de ces Tables.

B.

INTRODUCTION.

Στρεψ. — Τοῦτο δ' ἔσθ' ὁ τόκος τί θηρίον;
Ἀμυν. — Τί δ' ἄλλο γ' ἢ κατὰ μῆνα καὶ καθ' ἡμέραν
πλέον πλέον ἐ' ἀργύριον ἀεὶ γίγνεται,
ὑποῤῥέοντος τοῦ χρόνου;

ΑΡΙΣΤΟΦΑΝΟΥΣ ΝΕΦΕΛΑΙ (*).

(*) Strepsiade. — L'intérêt! quelle bête est-ce cela?
Amynias. — C'est l'argent qui s'accroît sans cesse chaque mois et chaque jour, à mesure que le temps s'écoule.

(Les *Nuées* d'Aristophane.)

Définitions.

L'*Intérêt* est la redevance payée pour l'usage (*usura*) d'une somme d'argent appelée *capital*, ou le bénéfice qu'en retire l'emprunteur.

Pour déterminer ce bénéfice, qui dépend généralement de conditions faites par l'emprunteur au prêteur, on a besoin d'un terme de comparaison dont on puisse se servir pour calculer l'intérêt de la somme prêtée, quelle qu'elle puisse être : c'est pourquoi la redevance à payer pour la libre disposition de 100 francs pendant un an a reçu le nom de *taux de l'intérêt pour cent*.

Ce taux varie considérablement, suivant la situation financière et politique d'un pays et la nature de ses transactions;

mais, dans la plupart des États, les lois assignent une limite extrême à ce taux, limite que l'on a appelée l'*intérêt légal*, et tout intérêt dépassant cette limite s'appelle *usure* (*).

Lorsque le capital reste plusieurs années dans les mains de l'emprunteur, celui-ci doit payer au prêteur, à des époques déterminées, l'intérêt tel qu'il a été réglé d'avance entre les parties; sinon on doit considérer cet intérêt même comme un nouveau capital, pour lequel un intérêt est pareillement exigible : c'est ce qu'on appelle l'*intérêt composé*.

L'intérêt qui, quoique dû par l'emprunteur, reste en ses

(*) La première ordonnance relative à l'intérêt pécuniaire qui soit mentionnée dans l'histoire de l'Angleterre est un acte passé sous le règne de Richard Ier (1197), défendant aux Chrétiens de retirer un intérêt de leur argent.

Sous le règne de Henri II, on contractait aisément des emprunts en Angleterre à un taux inférieur à 20 pour 100; sous Henri III, le taux fut de 50 pour 100.

En 1545 (37 Henri VIII, c. 9) et en 1571 (13 Elisabeth, c. 8), il ne fut permis à personne de prendre au-dessus de 10 pour 100 par an; le délinquant devait payer le triple de cette valeur.

Le taux légal continua d'être 10 pour 100 jusqu'en 1624 (21 Jacques Ier, c. 17), époque à laquelle il fut réduit à 8 pour 100. Ensuite, en 1651, en vertu d'une ordonnance du *Rump Parliament*, confirmée en 1660 par Charles II, le taux légal fut réduit à 6 pour 100.

Enfin, en 1714 (12 Anne, c. 16), personne ne put prendre au-dessus de 5 pour 100 par an pour le prêt d'une somme d'argent; les bons, les contrats, etc., faits à un taux plus élevé, pouvaient être annulés et le délinquant payait le triple de cette valeur.

En 1586, une loi fut portée en Écosse fixant le taux légal à 10 pour 100.

Au temps de Néhémie (445 av. J.-C.), les Juifs avaient à payer 1 pour 100 par mois.

A Athènes, on n'imposa jamais de restriction au taux de l'intérêt, celui-ci ayant été déclaré libre par une loi, que l'on attribue à Solon lui-même. D'après Grote (*Histoire de la Grèce*), l'intérêt était entre 10 et 36 pour 100, et ordinairement entre 12 et 18 pour 100.

On ne sait pas exactement quel fut à Rome le taux de l'intérêt (*unciarum fœnus*). Au temps de Sylla (82 av. J.-C.), la centième partie (*centesima*), ou 1 pour 100 par mois, était reconnue pour le taux usuel et légal. Brutus, conformément à un sénatus-consulte, prêta de l'argent, dans Chypre, à 48 pour 100. Cicéron, en entrant au gouvernement de la Cilicie, émit un édit fixant à 1 pour 100 par mois le taux de l'intérêt, avec l'intérêt des intérêts à la fin de chaque année. Sous Tibère, le taux fut à Rome de 6 pour 100; sous Alexandre Sévère (en 230), le taux légal fut réduit à 4 pour 100, et plus tard à 3 $\frac{1}{2}$ pour 100.

En France, un édit de Philippe-Auguste (1272) fixa comme limite du taux légal 48 pour 100. Philippe IV, en 1311, décréta que l'intérêt qui pourrait être légalement exigé dans les marchés de la Champagne serait de 20 pour 100.

Charles V (en 1545) fixa à 12 pour 100 le taux de l'intérêt dans les Pays-Bas.

mains sans produire un nouvel intérêt, s'appelle *intérêt simple;* il est toujours proportionnel au temps.

Une annuité est une rente ou un revenu périodique payable à la fin de chaque année ou à des intervalles de temps égaux. Elle est appelée *certaine* lorsqu'elle doit durer un nombre d'années déterminé; elle est *viagère* lorsqu'elle dépend de la survivance d'une ou de plusieurs têtes.

Lorsque l'intervalle entre l'époque de l'achat de l'annuité et le premier payement est égal à l'intervalle qui sépare deux payements consécutifs quelconques, l'annuité est dite *immédiate.*

Lorsque l'intervalle entre l'époque de l'achat d'une annuité et le premier payement est *plus grand* que l'intervalle qui sépare deux payements immédiatement consécutifs, c'est-à-dire lorsqu'on ne doit pas entrer immédiatement en jouissance de l'annuité, celle-ci s'appelle *annuité différée* ou *annuité avec entrée différée.*

Une réversion ou *annuité réversible* est une annuité déjà en existence et qui, après un temps donné, ou à la mort du possesseur actuel, est réversible à un autre possesseur.

Lorsque l'intervalle entre le temps de l'achat d'une annuité et le premier payement est moindre que l'intervalle qui sépare deux payements immédiatement consécutifs, ou lorsqu'on est entré en jouissance de l'annuité depuis une certaine époque, on peut appeler celle-ci *annuité avec entrée passée.*

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Dédicace V
Avertissement VII
Préface XI
Introduction XVII

PREMIÈRE PARTIE.

DU MONTANT D'UNE SOMME QUELCONQUE A INTÉRÊTS COMPOSÉS.

1. Montant du capital, l'intérêt étant payable annuellement, § I-IV 1
2. Montant du capital, l'intérêt étant payable tous les six mois, tous les trois mois, tous les mois, d'une manière continue, § V-VII 6
3. Montant d'un capital pour une fraction d'année, § VIII 11

DEUXIÈME PARTIE.

DE LA VALEUR ACTUELLE D'UNE SOMME PAYABLE A UNE ÉPOQUE FUTURE.

1. Formule générale, § IX 15
2. Rapports entre l'escompte, l'intérêt et les annuités, § X-XII 18
3. Équation des payements, § XIII 22
4. Différentes sortes d'escompte, § XIV-XV 24

TROISIÈME PARTIE.

DES ANNUITÉS IMMÉDIATES.

1. Théorie et formule des annuités immédiates, § XVI-XIX 28
2. Tables de logarithmes pour le calcul des annuités, § XX-XXI 36
3. Amortissement et fonds d'amortissement, § XXII-XXIV 41
4. Annuités pour lesquelles le taux d'intérêt du capital diffère du taux d'intérêt du fonds d'amortissement, § XXV 60
5. Calcul du nombre d'annuités. Interprétation et payement des annuités lorsque leur nombre est fractionnaire, § XXVI-XXVIII 64
6. Taux d'intérêt des annuités immédiates, § XXIX-XXXIV 71

Pages.

7. Des payements périodiques en général. Évaluation des annuités lorsque les époques pour les payements de l'annuité et de l'intérêt ne concordent pas, § XXXV-XLI 84
8. Équation des annuités, § XLII-XLIV 114
9. Rentes nationales, § XLV-XLIX 119
10. Obligations ou bons, § L-LI 130
11. Annuités croissant ou décroissant dans un rapport constant, § LII-LIII 156
12. Parités ou valeurs relatives des annuités, § LIV 163

QUATRIÈME PARTIE.

DES ANNUITÉS DIFFÉRÉES. — DES RÉVERSIONS.

1. Théorie des annuités différées, payables annuellement, § LV-LVII 165
2. Annuités différées, payables tous les six mois, tous les trois mois, etc., § LVIII. 170
3. Taux des réversions, § LIX-LXI 173
4. Annuités perpétuelles différées, § LXII 177
5. Renouvellement des baux, § LXIII 181

CINQUIÈME PARTIE.

1. Montant des annuités arriérées, § LXIV-LXVIII 184
2. Montant des placements annuels ou périodiques, § LXIX-LXXII 196
3. Valeur actuelle des annuités à dividende croissant, § LXXII 205

SUPPLÉMENT.

1. Recherche du logarithme d'un nombre par la méthode des réciproques approchés 213
2. Recherche du nombre 225

TABLES DE LOGARITHMES

POUR LES CALCULS LES PLUS DIFFICILES D'INTÉRÊTS, D'ESCOMPTES, D'ANNUITÉS, ETC.

TABLE I. — A. Logarithmes du montant de 1fr à la fin d'un nombre quelconque d'années, de 1 à 100 ans .....
B. Logarithmes de l'annuité a ou $\frac{1}{f_n(t)}$ par laquelle on peut amortir un capital de 1fr dans un nombre quelconque d'années de 1 à 100 ans (*) 1-48
C. Les mêmes logarithmes pour les taux 2, 2 $\frac{1}{4}$, 2 $\frac{1}{2}$, 3 pour 100, et pour les valeurs de n comprises entre 101 et 200.

(*) Dans tout le cours du présent Traité, le logarithme de cette annuité est exprimé par $\log a$; dans la Table I, ce symbole est remplacé par $C^t \log f_n(t)$. Une note, placée à la fin de l'Ouvrage, immédiatement avant la Table I, donnera au lecteur l'explication de ce changement.

Pages.

TABLE II. — Logarithmes de l'accroissement et de la valeur actuelle de 1fr, à la fin de chaque mois, de 1 à 12 mois..... 51-53

TABLE III. — A. Pour les taux contenus dans les deux Tables précédentes :
1° Logarithmes à 10 et à 7 décimales de t, t étant l'intérêt de 1fr par an ou le taux.....
2° Logarithmes de r, r étant 1fr augmenté de son intérêt pour un an.....
3° Logarithmes de $\log r$..... 57

B. Pour tous les taux entre 0 et 10 pour 100, se succédant par $\frac{1}{12}$, logarithmes de t, r et de $\left(1+\frac{t}{100}\right)$..... 58

C. Pour tous les taux fractionnaires entre 0 et 10 pour 100, se succédant par $\frac{1}{10}$, logarithmes de t et r..... 59

TABLE IV. — Logarithmes à 7 décimales, à *soustraire* du logarithme de l'annuité, lorsque l'*annuité* se paye 2, 4, 6 ou 12 fois *plus souvent* que l'*intérêt*, ou à *ajouter* au logarithme de l'annuité, lorsque l'*annuité* se paye 2 ou 4 fois *moins souvent* que l'*intérêt*..... 63

TABLE V. — Logarithmes des logarithmes des nombres naturels de 1 à 100. 67

TABLE VI. — Contenant, pour tous les taux compris entre 2 et 3 pour 100, et croissant par $\frac{1}{100}$: 1° $\log r$; 2° r^2..... 70

TABLE VII. — Présentant, pour tous les taux compris entre 1 et 12 pour 100, et croissant par $\frac{1}{8}$: 1° r; 2° r^2; 3° $\log(1+r)$..... 72

TABLES VIII, IX, X. — Tables de logarithmes à 11 décimales..... 74-76

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

THÉORIE

DES

INTÉRÊTS COMPOSÉS

ET DES

ANNUITÉS.

PREMIÈRE PARTIE.

MONTANT D'UNE SOMME QUELCONQUE A INTÉRÊTS COMPOSÉS AU BOUT D'UN TEMPS DONNÉ.

---

§ I. — Accroissement du capital a intérêts composés a la fin d'un nombre entier d'années.

Soient

t l'intérêt de 1^{fr} pour 1 an, ou la 100e partie du taux;
$r = 1 + t$ la somme de 1^{fr} augmentée de son intérêt pour 1 an, ou le rapport de l'accroissement annuel du capital;
n le nombre entier d'années pendant lesquelles il a été prêté;
p le capital;
M le montant de ce capital à la fin du temps donné.

1^{fr} s'élève dans 1 an à r^{fr}, et, puisque toute autre somme augmente dans 1 an suivant le même rapport, ces r^{fr} deviendront r^2, et de même r^2 deviendra r^3 au bout de 1 an. Donc :

r est le montant de 1^{fr}	dans	1	an,
r^2 »	»		dans 2 ans,
r^3 »	»		dans 3 ans.

En général,

r^n sera le montant de 1^{fr} dans n années,

et si l'on multiplie cette expression par un capital quelconque p, elle deviendra

$$(1) \qquad M = pr^n:$$

c'est le montant de ce capital au bout de n années.

Ainsi le montant d'un capital donné au bout d'un nombre d'années donné est égal au montant de 1^{fr} dans 1 an, élevé à la puissance marquée par ce nombre d'années et multiplié par le capital.

§ II. — Avantages présentés par l'emploi des logarithmes.

Quand le taux est exprimé par un nombre entier, 4 pour 100 par exemple, le rapport de l'accroissement est exprimé par deux chiffres significatifs, dont l'un est l'unité, par exemple 1,04; mais, si le taux est un nombre fractionnaire, ou si le nombre d'années est considérable, le calcul est très-fatigant et sujet à erreur. Dans de pareils cas, et surtout dans les problèmes suivants, l'usage des logarithmes est de la plus naute importance, et pour ainsi dire indispensable. En effet, à l'aide des logarithmes, toutes les multiplications compliquées sont ramenées à une seule et très-simple opération. La plupart des mathématiciens qui se sont occupés d'intérêts composés ont recommandé l'emploi des logarithmes comme la méthode la plus sûre, la plus facile et la plus expéditive pour résoudre les diverses questions que l'on rencontre.

§ III. — Formules et questions d'intérêts composés.

De la formule

$$(1) \qquad M = pr^n$$

on peut déduire les suivantes, pour trouver une quelconque

des quatre quantités, étant données les trois autres; ainsi l'on a :

Pour le capital,

$$(2) \qquad p = \frac{M}{r^n}, \quad \log p = \log M - \log r^n;$$

Pour le taux de l'intérêt,

$$(3) \qquad r = \sqrt[n]{\frac{M}{p}}, \quad \log r = \frac{\log M - \log p}{n}$$

(cette valeur, diminuée d'une unité, donne t qui, multiplié par 100, donne le taux);

Pour le nombre d'années,

$$(4) \qquad n = \frac{\log M - \log p}{\log r}.$$

L'emploi et l'application de ces formules seront pleinement expliqués par les exemples suivants :

Exemple I [montant, formule (1)]. — *Que deviennent, au bout de* 34 *ans, au taux de* $4\frac{3}{4}$, $5277^{fr},50$ *placés à intérêts composés?*

$$\log M = \log p + \log r^n = \log 5277,50 + \log r^{34};$$

$$\begin{aligned} \log 5277,50 &= 3,7224282 \\ \text{(Tab. 29) (*)} \quad \log r^{34} &= 0,6852371 \\ \hline \log M &= 4,4076653 \\ M &= 25566^{fr},15. \end{aligned}$$

Exemple II [montant, formule (1)]. — *On demande de trouver ce que deviennent au bout de* 157 *ans, au taux de* $4\frac{5}{8}$, 418^{fr} *placés à intérêts composés.*

$$\log M = \log p \quad + \log r^n,$$
$$\log M = \log 418 + \log r^{100} + \log r^{57};$$

(*) Le mot *Table* ou *Tab.* signifie qu'on trouve le logarithme sans aucun calcul dans les Tables dressées à la fin de cet Ouvrage.

$$\log 418 = 2,6211763$$
$$\text{(Tab. 28)}\quad \log r^{100} = 1,9635471$$
$$\log r^{47} = 1,1192218$$
$$\log M = 5,7039452$$

$$M = 505760^{fr},80.$$

Exemple III [capital, formule (2)]. — *Quel est le capital qui, placé à intérêts composés, au taux de* $5\frac{1}{4}$, *s'élèvera à* 4817000^{fr} *au bout de* 93 *ans?*

$$\log p = \log M - \log r^n = \log 4817000 - \log r^{93}.$$

$$\log 4817000 = 6,6827766$$
$$\text{(Tab. 33)}\quad \log r^{93} = 2,0666557$$
$$\log p = 4,6161209$$

$$p = 41316^{fr},25.$$

Exemple IV [taux, formule (3)]. — *Supposé que l'on retire* 5000^{fr} *pour le placement de* 1335^{fr} *pendant* 30 *ans, quel est le taux d'intérêt?*

$$\log r = \frac{\log M - \log p}{n} = \frac{\log 5000 - \log 1335}{30}.$$

$$\log 5000 = 3,6989700$$
$$\log 1335 = 3,1254813$$
$$\log r^{30} = 0,5734887$$
$$\log r = 0,0191163$$

$$r = 1,045.$$

$$\text{Le taux} = (1,045 - 1) \times 100 = 4\tfrac{1}{2}.$$

Exemple V [temps, formule (4)]. — *Pendant combien d'années doivent être placés* 3000^{fr}, *au taux de* 4 *pour* 100, *à intérêts composés, pour s'élever à* 102358^{fr}?

$$n = \frac{\log M - \log p}{\log r} = \frac{\log 102358 - \log 3000}{\log 1,04}.$$

$$\begin{aligned} \log 102358 &= 5,0101218 \\ \log 3000 &= 3,4771213 \\ \hline \log 102358 - \log 3000 &= 1,5330005 \end{aligned}$$

$$\log 1,04 = 0,01703334$$

$$n = \frac{1,5330005}{0,01703334}$$

$$n = 90 \text{ ans.}$$

Exemple VI (temps). — *Deux sommes sont placées en même temps à intérêts composés, la première de* 38000^{fr} *au taux de* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100, *la deuxième de* 99398^{fr} *au taux de* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100. *On demande de déterminer au bout de quel temps les deux sommes seront égales.*

$$38000 \times 1,045^x = 99398 \times 1,035^x \therefore \left(\frac{1,045}{1,035}\right)^x = \frac{99398}{38000},$$

$$x = \frac{\log 99398 - \log 38000}{\log 1,045 - \log 1,035};$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \log 99398 &= 4,9973776 \\ \log 38000 &= 4,5797836 \\ \hline \log 99398 - \log 38000 &= 0,4175940 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(Tab. 54)} \quad \log 1,045 &= 0,01911629 \\ \text{(Tab. 54)} \quad \log 1,035 &= 0,01494035 \\ \hline \log 1,045 - \log 1,035 &= 0,00417594 \end{aligned}$$

$$n = \frac{0,41759\ 40}{0,00417594}$$

$$n = 100 \text{ ans.}$$

§ IV. — Temps requis pour doubler un capital.

Exemple VII. — *Combien de temps un capital quelconque mettra-t-il pour se doubler à* 3 *pour* 100 *par an, à intérêts composés?*

Nous avons [formule (4)]

$$n = \frac{\log M - \log p}{\log r};$$

mais ici $M = 2p$; par conséquent,

$$n = \frac{\log 2p - \log p}{\log r} = \frac{\log 2}{\log r} = \frac{\log 2}{\log 1,03} = \frac{0,3010300}{0,0128372} \text{ (*)},$$

$$n = 23,4498 \text{ ans ou } 23 \text{ ans et } 164 \text{ jours.}$$

Si l'on demandait de trouver seulement le temps approximatif nécessaire pour doubler un capital à un taux quelconque, on pourrait le faire facilement en divisant le nombre 70 par le taux. Ainsi, dans l'exemple précédent, $n = \frac{70}{3} = 23,333$. En outre, si l'on demandait de trouver approximativement à 3 jours près le même temps, pour tous les taux compris entre zéro et 10 pour 100, on pourrait diviser 69,315 ans par le taux d'intérêt et ajouter au quotient $\frac{1}{200}$ de ce nombre, c'est-à-dire 0,346. Ainsi, pour le taux de 3 pour 100,

$$n = \frac{69,315}{3} + \frac{69,315}{200} = 23,105 + 0,346 = 23^{\text{ans}},451,$$

comme plus haut.

§ V. — Montant d'un capital quelconque a intérêts composés, l'intérêt étant payable chaque année, tous les six mois, tous les trois mois, etc.

Jusqu'ici nous avons toujours supposé l'intérêt convertible en capital à la fin de chaque année; considérons maintenant le cas où il doit être converti k fois par an, à k intervalles égaux et en k payements, chaque payement étant la $k^{\text{ième}}$ partie de l'intérêt annuel.

(*)
$$\log n = \log^2 2 - \log^2 r$$
$$\log^2 2 = 9,4786098$$
(Tab. 57) $$\log^2 r = 8,1084711$$
$$\log n = 1,3701387$$
$$n = 23,4498 = 23 \text{ ans, } 164 \text{ jours.}$$

Il ne faut pas oublier qu'en finances le jour est indivisible.

Le procédé sera encore le même que dans le cas des années entières, pourvu que le nombre n exprime toujours le nombre total des payements dans le temps donné, et t l'intérêt de 1^{fr} d'un payement à l'autre.

Voyons d'abord ce que devient, à l'expiration d'un an, un capital de 100^{fr}, au taux annuel de 4 pour 100, payable en portions égales et à des intervalles de temps égaux.

Si l'intérêt est payable chaque année, le capital 1^{fr} s'élèvera à la fin d'une année à $1^{fr},04$.

Si l'intérêt est payable chaque semestre et par moitié, c'est-à-dire à 2 pour 100 pour 6 mois, nous trouvons qu'à l'expiration du premier semestre chaque franc deviendra $1^{fr},02$; cette somme, au bout du second semestre, deviendra 1,02, et par conséquent le montant du capital 100^{fr} sera

$$100 \times 1,02^2 = 104^{fr},04.$$

Si l'intérêt est payable par trimestre, c'est-à-dire est de 1 pour 100 pour 3 mois, le capital 100^{fr} deviendra à la fin de l'année

$$100 \times 1,01^4 = 104^{fr},060401.$$

Si l'intérêt est payable tous les mois, c'est-à-dire est de $\frac{1}{3}$ pour 100 pour 1 mois, le capital 100^{fr} s'élèvera, à l'expiration des 12 mois, à

$$100\left(1+\frac{1}{300}\right)^{12} = 104^{fr},074155.$$

Si enfin l'intérêt doit être converti à chaque instant, car nous pouvons prendre des intervalles de plus en plus petits et par conséquent infiniment petits, le montant atteindra à la fin de l'année son maximum 104,081077.

Donc, le taux nominal étant de 4 pour 100 par an, le taux vrai sera :

Pour des payements	semestriels	.....	4,04
» »	trimestriels	.....	4,060401
» »	mensuels	.....	4,074155
» »	continus	.....	4,081077

Ainsi nous voyons que le montant du capital augmente avec le nombre des intervalles, et atteint son maximum quand l'intérêt doit être converti à chaque instant; par conséquent, les avantages sont d'autant plus grands que le nombre des payements annuels est plus considérable.

§ VI. — Application de la formule générale aux intérêts convertibles tous les six mois, tous les trois mois, etc.

Si l'intérêt, convertible en capital, se paye k fois dans un an, chaque payement étant la $k^{\text{ième}}$ partie de l'intérêt annuel, le montant de 1fr à la fin de l'année sera $\left(1+\frac{t}{k}\right)^k$ [form. (1)]. Ainsi, si le taux nominal est t, le taux vrai sera

$$\left(1+\frac{t}{k}\right)^k-1$$

et, par conséquent, un capital p deviendra, à la fin de n années,

$$\text{(5)} \qquad M=p\left(1+\frac{t}{k}\right)^{kn}.$$

Suivant que k est égal à 1, 2, 4, 12, ou à un nombre infini, c'est-à-dire suivant que le payement s'effectue 1, 2, 4, 12 fois par an ou continuellement, le montant sera, pour des payements semestriels,

$$M=p\left(1+\frac{t}{2}\right)^{2n}=p\left(1+t+\frac{t^2}{4}\right)^n;$$

trimestriels,

$$M=p\left(1+\frac{t}{4}\right)^{4n}=p\left(1+t+\frac{3t^2}{8}+\frac{t^3}{16}+\frac{t^4}{256}\right)^n:$$

mensuels,

$$M=p\left(1+\frac{t}{12}\right)^{12n};$$

continus,

$$M=p\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots\right)^n=pe^{tn},$$

e étant la base du système des logarithmes hyperboliques (*) égal à 2,7182818.

§ VII. — Exemples d'intérêt payable par semestre, trimestre, etc.

Exemple VIII. — *A combien s'élèveront* 39855^{fr}, *placés à intérêts composés à* 6 *pour* 100 *pendant* 7 *ans, l'intérêt étant convertible par trimestre?*

Ce montant sera exactement le même que celui du même capital pendant 28 ans, à $1\frac{1}{2}$ pour 100; par conséquent,

$$\log M = \log p + \log r^{28} = \log 39855 + \log r^{28}.$$

$$\begin{aligned} \log 39855 &= 4,6004828 \\ \text{(Tab. 3)}\quad \log r^{28} &= 0,1810492 \\ \hline \log M &= 4,7815320 \end{aligned}$$

$$M = 60468^{fr},90.$$

(*) Quand on développe, d'après le principe du théorème du binôme, l'expression $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, on obtient

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{2} + \left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\frac{1}{2.3} \\ + \left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\left(1-\frac{3}{k}\right)\frac{1}{2.3.4} \\ + \left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\left(1-\frac{3}{k}\right)\left(1-\frac{4}{k}\right)\frac{1}{2.3.4.5} + \cdots \end{aligned}$$

Si k est infiniment grand, c'est-à-dire si $k = \infty$, la formule deviendra

$$\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots$$

ou, en décimales, 2,718281828459045.

Ce nombre, dont le logarithme vulgaire est 0,4342944819, est exprimé par la lettre e.

$$\log 0,4342944819 = 9,6377843.$$

Si l'on demandait de déterminer la valeur de $M = \left(1+\frac{t}{k}\right)^{kn}$, dans l'hypothèse $k = \infty$, nous l'aurions en substituant mt à k, m étant pareillement égal à ∞,

$$M = \left[\left(1+\frac{t}{mt}\right)^m\right]^{tn} = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{tn} = e^{tn}.$$

Exemple IX. — *Quelle somme s'élèvera à* 100000^{fr} *en* 23 *ans, l'intérêt convertible par semestre étant de* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100 ?

$$\frac{t}{k} = \frac{0,045}{2} = 0,0225 = 2\tfrac{1}{4} \quad \text{et} \quad kn = 2 \times 23 = 46,$$

$$\log p = \log M - \log r^{46} = \log 100000 - \log r^{46}.$$

$$\begin{aligned} \log 100000 &= 5 \\ \text{(Tab. 8)} \quad \log r^{46} &= 0,44451 \\ \hline \log M &= 4,55549 \\ M &= 35932^{fr},50. \end{aligned}$$

Exemple X. — *Quel est, au bout de* 87 *ans, le montant de* 100^{fr}, *placés à intérêts composés, au taux de* 9 *pour* 100, *l'intérêt étant annuel, semestriel, trimestriel et continu ?*

1° Annuel (9 pour 100) :

$$\log M = \log p + \log r^{87}.$$

$$\begin{aligned} \log p &= 2 \\ \text{(Tab. 46)} \quad \log r^{87} &= 3,2561053 \\ \hline \log M &= 5,2561053 \\ M &= 18034^{fr},55. \end{aligned}$$

2° Semestriel ($4\frac{1}{2}$ pour 100, $kn = 174 = 100 + 74$) :

$$\log M = \log p + \log r^{100} + \log r^{74}.$$

$$\begin{aligned} \log p &= 2 \\ \text{(Tab. 27)} \quad \log r^{100} &= 1,9116290 \\ \log r^{74} &= 1,4146055 \\ \hline \log M &= 5,3262345 \\ M &= 211950,50. \end{aligned}$$

3° Trimestriel ($2\frac{1}{4}$ pour 100, $kn = 348$) :

$$\log M = \log p + (\log r^{30}) \times 10 + \log r^{48}.$$

$$\begin{aligned} \log p &= 2 \\ 10 \log r^{30} &= 2,8989950 \\ \log r^{48} &= 0,4638392 \\ \hline \log M &= 5,3628342 \\ M &= 230586,70. \end{aligned}$$

4° Continu ($\log e = 0,43429448$, $n = 87$, $t = \frac{9}{100}$ et $M = p.\ e^{tn}$) :

$$\log M = \log p + \log e \times \frac{87 \times 9}{100}.$$

$$\begin{aligned} \log p &= 2 \\ \frac{87 \times 9}{100} \log e &= 3,4005258 \\ \hline \log M &= 5,4005258 \\ M &= 251492,90. \end{aligned}$$

§ VIII. — Montant d'un capital quelconque pendant des fractions d'année.

Nous avons déjà montré que le montant du capital varie et augmente, quand l'intérêt, au lieu d'être payable annuellement, est convertible un nombre déterminé de fois chaque année et que, réciproquement, l'intérêt d'un capital quelconque, placé à intérêts composés, pendant une fraction d'année, est toujours moindre que la fraction correspondante de l'intérêt annuel.

Ainsi, si l'on devait recevoir à la fin d'un semestre 2fr pour l'intérêt de 100fr placés à intérêts composés, on ne tardera pas à s'apercevoir que le taux de l'intérêt ne serait pas 4 pour 100 par an, mais $4\frac{1}{25}$; et réciproquement, si le taux est de 4 pour 100 par an, l'intérêt pour 6 mois serait inférieur à 2 pour 100.

Supposons donc que le taux soit tel que le montant de 1fr à l'expiration de la première année devienne $(1 + t)$, et désignons par x l'intérêt de 1fr pour $\frac{1}{k}$ de l'année, le montant de ce franc sera

Au premier	terme de conversion		.....	$1 + x$
Au second	»	»	.....	$(1 + x)^2$
Au troisième	»	»	.....	$(1 + x)^3$
Au $n^{\text{ième}}$	»	»	.....	$(1 + x)^n$

et enfin à l'expiration de la $k^{\text{ième}}$ période, c'est-à-dire à la fin de l'année, $(1 + x)^k$; mais cette dernière valeur doit être égale

à $(1+t)$; on a donc

$$(1+x)^k = (1+t),$$

d'où

$$1+x = \sqrt[k]{1+t}$$

ou

$$(1) \qquad 1+x = (1+t)^{\frac{1}{k}};$$

et, par conséquent, le montant du capital à la fin de la $\frac{n^{\text{ième}}}{k}$ partie de l'année sera $(1+t)^{\frac{n}{k}}$, et l'intérêt payable à ce terme sera $\left[(1+t)^{\frac{n}{k}} - 1\right]$.

Si, dans l'équation (1), $k = 2$, nous aurons

$$1+x = (1+t)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+t};$$

par conséquent, on peut trouver le montant de 1fr pendant 1 semestre, en extrayant la racine carrée du montant de 1fr pendant 1 an au taux donné. Cette racine, une fois trouvée, représentera la somme placée au même taux pendant le semestre suivant.

Par exemple, la racine carrée de 1,04 est 1,0198039027 et représente le montant de 1 franc à 4 pour 100 dans un semestre: si l'on multiplie cette valeur 1,0198039027 par 1,0198039027, c'est-à-dire par elle-même, le produit sera 1,04000000, montant de 1fr dans un an.

De même, si l'on demandait de déterminer à combien s'élèvera 1fr dans $\frac{1}{3}$ d'année ou 4 mois, on aurait

$$1+x = \sqrt[3]{1+t},$$

c'est-à-dire la racine cubique de $(1+t)$, qui, dans l'hypothèse du taux de 4 pour 100, serait 1,0131594.

Ainsi l'intérêt de 1000fr à 4 pour 100, à intérêts composés, sera pour 6 mois de 19fr,804, et pour 4 mois de 13fr,159.

Exemple XI. — *Quels seront, au bout de six mois, le montant*

et l'intérêt de 2000000^{fr}, *placés à intérêts composés, au taux de* 5 *pour* 100 ?

$$\log M = \log p + r^{\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \log M &= \log 2000000 + \log r^{\frac{1}{2}} \\ \log p &= 6,3010300 \\ \text{(Tab. 52)}\quad \log r^{\frac{1}{2}} &= 0,0105946 \\ \hline \log M &= 6,3116246 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= 2049390^{fr},10, \\ \text{Intérêt} &= 2049390^{fr},10 - 2000000^{fr} = 49390^{fr}. \end{aligned}$$

Exemple XII. — *Trouver le montant de* 135865^{fr} *à* $4\frac{3}{8}$ *pour* 100, *au bout de* 17 *ans* 5 *mois.*

p au bout de 17 ans devient pr^{17}; 1^{fr} au bout de 5 mois devient $r^{\frac{5}{12}}$; pr^{17} devient donc, au bout de 5 mois, $pr^{17} \times r^{\frac{5}{12}}$; on peut donc établir

$$\log M = \log p + \log r^{17} + \log r^{\frac{5}{12}} = \log 135865 + \log r^{17} + r^{\frac{5}{12}}.$$

$$\begin{aligned} \log 135865 &= 5,1331076 \\ \log r^{17} &= 0,3161403 \\ \text{(Tab. 52)}\quad \log r^{\frac{5}{12}} &= 0,0077485 \\ \hline \log M &= 5,4569964 \end{aligned}$$

$$M = 286415^{fr},40.$$

Exemple XIII. — *Quel capital pourra s'élever, en* 23 *ans* 85 *jours, à* 3800^{fr}, *à* $3\frac{1}{4}$ *pour* 100?

$$\log p = \log M - (\log r^{23} + \tfrac{1}{365} \log r^{85}).$$

$$\begin{aligned} \log M = \log 3800 &= 3,57978 \\ \text{(Tab. 17)}\quad \log r^{23} &= 0,31947 \\ \tfrac{1}{365} \log r^{85} &= 0,00323 \\ \hline \log r^{23} + (\log r^{85}) \times \tfrac{1}{365} &= 0,32270 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log p &= 3,25708, \\ \text{Valeur actuelle } p &= 1807^{fr},50. \end{aligned}$$

Exemple XIV. — *Calculer l'intérêt de* 40000^{fr} *pendant* 3 *mois, au taux de* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100.

$$\log M = \log p + \log r^{\frac{1}{4}} = \log 40000 + \log r^{\frac{1}{4}}.$$

$$\begin{aligned} \log p &= 4,6020600 \\ \text{(Tab. 51)}\quad \log r^{\frac{1}{4}} &= 0,0047791 \\ \hline \log M &= 4,6068391 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= 40442^{fr},60, \\ \text{Intérêt} &= 442^{fr},60. \end{aligned}$$

Exemple XV. — *Combien faudra-t-il de temps à une somme de* 635^{fr}, *portant intérêt au taux de* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100 *par an et convertible par semestre, pour s'élever à* 1200^{fr}?

$$n = \frac{\log M - \log p}{\log r}.$$

$$\begin{aligned} \log M &= 3,07918 \\ \log p &= 2,80277 \\ \hline \log M - \log p &= 0,27641 \end{aligned}$$

$$\text{(Tab. 57)}\quad \log r = 0,0075344.$$

par conséquent

$$n = \frac{0,27641}{0,0075344},$$

$$n = 36 \text{ semestres, } 686 \quad \text{ou} \quad 18 \text{ ans, } 125 \text{ jours.}$$

Si l'on veut diviser le numérateur de n par son dénominateur à l'aide des logarithmes, on peut du logarithme du numérateur soustraire le logarithme de $\log r$. Ainsi nous aurions, dans l'exemple précédent,

$$\begin{aligned} \log 0,2764075 &= 9,44155 \\ \text{(Tab. 57)}\quad \log \log r &= 7,87705 \\ \hline \log n &= 1,56450 \end{aligned}$$

$$n = 36 \text{ semestres } 686,$$

comme plus haut.

DEUXIÈME PARTIE.

VALEUR ACTUELLE D'UNE SOMME PAYABLE A UNE ÉPOQUE FUTURE.

§ IX. — De l'escompte.

La valeur actuelle d'une somme payable à une époque future, c'est le capital qui s'élèvera à cette somme dans le temps donné. Ainsi 100^{fr} deviennent 105^{fr} à la fin de 1 an, au taux de 5 pour 100; par conséquent, la valeur actuelle de 105^{fr} payables dans 1 an est 100^{fr}.

L'*escompte* est la retenue opérée pour le payement d'une somme avant son terme d'échéance, c'est-à-dire la différence entre la somme payable à une époque future et sa valeur actuelle.

Par conséquent [formule (2)] la valeur actuelle de 1^{fr} payable à l'expiration de n années est $\frac{1}{r^n}$, valeur qui, multipliée par le montant de la somme due M, donnera $p = \frac{M}{r^n}$ [formule (2)] pour la valeur actuelle de la somme M payable dans n années; l'escompte sera donc

$$D = M - \frac{M}{r^n}$$

ou

$$D = M\left(1 - \frac{1}{r^n}\right). \tag{6}$$

Exemple XVI. — *Déterminer la valeur actuelle et l'escompte de* 360000^{fr} *payables dans* 7 *ans à* 6 *pour* 100.

$$\log p = \log M - \log r^n.$$

$$\begin{aligned} \log M &= 5,5563025 \\ \text{(Tab. 39)}\quad \log r^7 &= 0,1771411 \\ \hline \log p &= 5,3791614 \end{aligned}$$

$$p = 239420^{fr},60.$$

Cette somme, soustraite de 360000^{fr}, donnera pour l'escompte

$$D = 360000 - 239420,60 = 120579^{fr},40.$$

Exemple XVII. — *Quelle est la valeur actuelle de* 3855^{fr},50 *payables dans* 43 *jours, à* 8 *pour* 100, *intérêts composés?*

$$\log p = \log M - (\log r^{43})\tfrac{1}{365}.$$

$$\begin{aligned} \log 3855,50 &= 3,5860807 \\ \tfrac{1}{365}\log r^{43}\ \text{(Tab. 45)} &= 0,0039376 \\ \hline \log p &= 3,5821431 \end{aligned}$$

donc

$$p = 3820^{fr},70 \quad \text{et} \quad D = 34^{fr},80.$$

Exemple XVIII. — *On demande la valeur actuelle de* 442^{fr},60 *payables dans* 3 *mois, à* 4 $\frac{1}{2}$ *pour* 100.

$$\log p = \log 442,60 - \log r^{\frac{1}{4}}.$$

$$\begin{aligned} \log 442,60 &= 2,64601 \\ \text{(Tab. 51)}\quad \log r^{\frac{1}{4}} &= 0,00478 \\ \hline \log p &= 2,64123 \end{aligned}$$

$$p = 437^{fr},75.$$

Exemple XIX. — *Valeur actuelle d'une somme payable, en cas de survivance, dans un temps donné.*

On demande de trouver la valeur actuelle de 75000^{fr} paya-

bles dans 17 ans, constitués sur une seule tête âgée de 26 ans, le taux de l'intérêt étant de 4 pour 100. On s'en rapportera à la Table de mortalité de Northampton.

75000^{fr} payables dans 17 ans valent actuellement $\frac{75000}{r^{17}}$.

D'après la Table de mortalité de Northampton, sur 11650 enfants nouveau-nés, 4685 vont au delà de 26 ans et 3404 au delà de 43 ans. Pour payer 1^{fr} à chaque survivant âgé de 43 ans, les 4685 personnes âgées de 26 ans doivent payer la valeur actuelle de 3404^{fr} payables dans 17 ans; une seule des 4685 personnes âgées de 26 ans doit donc payer la valeur actuelle de $\frac{3404}{4685}$ payables dans 17 ans; et enfin, pour que chaque survivant de 43 ans reçoive 75000^{fr}, chacune des 4685 personnes âgées de 26 ans doit verser la valeur actuelle de $\frac{3404 \times 75000}{4685}$ payables dans 17 ans. Cette valeur actuelle est donc $V = \frac{3404 \times 75000}{4685 \times r^{17}}$.

$$\log V = \log 3404 - \log 4685 + \log 75000 - \log r^{17}.$$

$$\begin{array}{rl} & \log 3404 = 3,5319896 \\ \text{Ct}(*) & \log 4685 = 6,3292904 \\ & \log 75000 = 4,8750613 \\ (\text{Tab. } 23) & \text{Ct} \log r^{17} = 9,7104332 \\ \hline & \log V = 4,4467745 \end{array}$$

$$V = 27975^{fr},30:$$

telle est la valeur actuelle de 75000^{fr}.

(*) Ct exprime le complément arithmétique d'un logarithme, c'est-à-dire la différence entre ce logarithme et le nombre 10. On emploie les compléments arithmétiques pour éviter les soustractions; ainsi, dans le cas présent, au lieu de soustraire $\log r^{17}$ de $\log 75000$ et $\log 4685$ de $\log 3404$, nous écrivons les compléments de $\log r^{17}$ et $\log 4685$, ensuite nous ajoutons les quatre logarithmes et de la caractéristique totale nous retranchons autant de fois 10 qu'il y a de compléments ou de divisions, c'est-à-dire 2×10 ou 20.

§ X. — Rapport entre l'escompte et l'intérêt.

Nous avons trouvé que l'escompte d'une somme M payable dans n années est

$$D = M\left(1 - \frac{1}{r^n}\right).$$

De même, nous avons vu qu'un capital M donnera au bout de n années un intérêt $I = M(r^n - 1)$; par conséquent,

$$I = Dr^n \quad \text{et} \quad D = \frac{I}{r^n};$$

en d'autres termes, l'intérêt d'un capital est égal à l'escompte de ce capital augmenté de l'intérêt de cet escompte pendant le même temps.

Réciproquement, l'escompte est égal à la valeur actuelle de l'intérêt.

Exemple XX. — *Quel est l'escompte de* 40000^{fr} *payables dans* 3 *mois, à* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100?

$$\log p = \log M - \log r^{\frac{1}{4}} = \log 40000 - \log r^{\frac{1}{4}}.$$

$$\log 40000 = 4,6020600$$

$$(\text{Tab. } 31)\quad \log r^{\frac{1}{4}} = 0,0047791$$

$$\log p = 4,5972809$$

d'où

$$p = 39562^{fr},25; \quad D = 437^{fr},75.$$

Nous avons déjà trouvé (exemple XIV) que l'intérêt de 40000^{fr} pour 3 mois est de 442^{fr},60.

La valeur actuelle de cette dernière somme, payable dans 3 mois, est de 437^{fr},75 (exemple XVIII). On peut voir par là que l'escompte de 40000^{fr} pour 3 mois est égal à la valeur actuelle de l'intérêt de ce capital pour le même espace de temps.

§ XI.

Lorsque l'intérêt est convertible par semestre, par trimestre, etc..., la valeur actuelle d'un capital se calcule au moyen de la formule suivante :

$$(7) \qquad p = \frac{M}{\left(1+\frac{t}{k}\right)^{kn}},$$

dans laquelle k représente le nombre des payements annuels [formule (2)].

Or, si k est plus grand que 1, la valeur de $\left(1+\frac{t}{k}\right)^{k}$ est plus grande que $(1+t)$, et la valeur du dénominateur $\left(1+\frac{t}{k}\right)^{kn}$ augmentera avec k, quoique toujours inférieure à e^{nt}.

Par conséquent, la valeur actuelle est d'autant moindre et l'escompte d'autant plus grand que les époques où l'intérêt se convertit en capital sont plus nombreuses.

Exemple XXI. — *Quelle est la valeur actuelle, quel est l'escompte de* 360000^{fr} *payables dans* 7 *ans, l'intérêt étant de* 6 *pour* 100, *convertible par semestre, par trimestre et d'une manière continue?* (*Voir* exemple XVI.)

Par semestre, 3 pour 100 :

$$\log p = \log 360000 - \log r^{14}.$$

$$\begin{aligned} \log 360000 &= 5,5563025 \\ \text{(Tab. 15)} \quad \log r^{14} &= 0,1797211 \\ \hline \log p &= 5,3765814 \end{aligned}$$

Valeur actuelle $p = 238002^{fr},40$,

Escompte $D = 121997^{fr},60$.

Par trimestre, $1\frac{1}{2}$ pour 100 :

$$\log p = \log 360000 - \log r^{28}.$$

$$\log 360000 = 5,5563025$$
$$\text{(Tab. 3)} \quad \log r^{28} = 0,1810492$$
$$\log p = 5,3752533$$

Valeur actuelle $p = 237275^{fr},70$,

Escompte $D = 122724^{fr},30$.

Continuellement :

$$t = \frac{6}{100}, \quad n = 7;$$
$$p = \frac{360000}{e^{tn}} = \frac{360000}{e^{\frac{6\times 7}{100}}},$$
$$\log p = \log 360000 - \frac{42}{100}\log e.$$

$$\log 360000 = 5,5563025$$
$$\frac{42}{100}\log e = 0,1824037$$
$$\log p = 5,3738988$$

Valeur actuelle $p = 236536^{fr},80$,

Escompte $D = 123463^{fr},20$.

Ainsi la valeur actuelle de 360000^{fr} payables dans 7 ans, au taux nominal de 6 pour 100, sera :

			fr
L'intérêt étant convertible		annuellement....	239420,60
»	»	par semestre.....	238002,40
»	»	par trimestre....	237275,70
»	»	continuellement..	236536,80

Cette dernière somme est le minimum que puisse atteindre la valeur actuelle.

§ XII. — Rapport remarquable entre l'escompte et les annuités.

La valeur de l'escompte de la somme M, payable dans n années, est, d'après le § IX [formule (6)],

$$D = M\left(1 - \frac{1}{r^n}\right).$$

Mais, dans le Chapitre suivant, on montrera que la valeur actuelle de n annuités de 1^{fr} est

$$\varphi = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right);$$

donc

$$D = \varphi M t.$$

Mt désigne aussi l'intérêt annuel de la somme M.

Par conséquent, l'escompte de M^{fr} payables dans n années est égal à la valeur actuelle de n annuités dont le montant annuel serait égal à l'intérêt annuel de M^{fr} (*).

Exemple XXII. — *Quel est l'escompte de* 360000^{fr} *payables dans* 7 *ans, le taux de l'intérêt étant de* 6 *pour* 100 *par an?*

L'intérêt de 360000^{fr} pour 1 an est de 21600^{fr}; par conséquent, l'escompte est égal à 7 annuités de 21600^{fr} (valeur actuelle).

$$\begin{aligned} \log 21600 &= 4,3344538 \\ \text{(Tab. 39)}\quad \log a\ (**) &= 9,2531805 \\ \hline \log D &= 5,0812733 \end{aligned}$$

$$D = 120579^{fr},40,$$

comme plus haut.

$$D = 360000^{fr} - 239420^{fr},60 = 120579^{fr},40.$$

Exemple XXIII. — *Quel est l'escompte de* 360000^{fr} *payables dans* 7 *ans, le taux de l'intérêt étant de* $1\frac{1}{2}$ *pour* 100 *par trimestre?*

(*) (Troisième partie) α désignant une annuité quelconque, on a V (valeur actuelle des annuités) $= \varphi\alpha$; si l'on fait $\alpha = Mt$, on aurait aussi $D = \alpha\varphi$, et par conséquent $D = V$. On peut donc considérer D comme égal à la valeur actuelle de n annuités de $\alpha^{fr} = Mt$, l'intérêt annuel de M.

Cela est tout naturel. En effet, l'escompte exprime la perte sur le capital nominal; or cette perte consiste justement dans la perte d'intérêt. Par exemple, le taux d'intérêt étant à 6 pour 100, la perte sera dans la privation de 21600^{fr} par an pendant 7 ans (exemple XXII).

(**) a étant l'annuité rachetée par 1^{fr} dans un nombre donné d'années.

L'intérêt de 360000^{fr} pendant 3 mois est de 5400^{fr}; par conséquent, l'escompte est égal à la valeur actuelle de 28 annuités de 5400^{fr}.

$$\begin{aligned} \log 5400 &= 3,7323938 \\ (\text{Tab. } 3)\quad \log a &= \underline{8,6434633} \\ \log D &= 5,0889305 \end{aligned}$$

$$D = 122724^{fr},30.$$

comme plus haut,

$$D = 360000 - 237275^{fr},70 = 122724^{fr},30.$$

§ XIII. — Équation des payements.

Lorsqu'une somme doit être payée en deux ou plusieurs parties à différents termes, on demande souvent de convertir en un seul payement la somme de ces payements partiels. Ils faut alors déterminer l'époque à laquelle la dette entière doit être acquittée. C'est ce qu'on peut appeler *faire l'équation des payements*.

La solution de ce problème est très-simple. Si, en effet, on appelle S la dette entière, V la valeur actuelle du payement unique ou de tous les payements partiels, et x le temps vrai du payement unique, la valeur de x sera exprimée par la formule

$$(4) \qquad x = \frac{\log S - \log V}{\log r}.$$

Exemple XXIV. — 2890^{fr} *doivent être acquittés en trois payements partiels, le premier de* 1294^{fr} *dans* 7 *mois, le deuxième de* 735^{fr} *dans* 2 *ans et enfin le troisième de* 861^{fr} *dans* 5 $\frac{1}{2}$ *ans; à quelle époque, en comptant l'intérêt composé à* 5 $\frac{3}{8}$ *pour* 100, *la dette entière de* 2890^{fr} *pourra-t-elle être acquittée en un seul payement?*

La valeur actuelle des trois payements partiels, que l'on a déjà appris à calculer, est de 2562^{fr},57.

Par conséquent,

$$\log S = 3,46090$$
$$\log V = 3,40867$$
$$(\log S - \log V) \text{ ou } \log \frac{S}{V} = 0,05223$$

$$\log^2 \frac{S}{V} \text{ ou } \log \log \frac{S}{V} = 0,71792 \quad (\textit{voir} \text{ p. } 14)$$

$$(\text{Tab. } 57) \quad \log^2 r \text{ ou } \log \log r = 0,35674$$
$$\log x = 0,36118$$

$$x = 2,2970 \text{ ou } 2 \text{ ans } 108 \text{ jours.}$$

Quand les deux payements partiels sont égaux, si l'on veut faire l'équation du temps vrai, nous ferons observer qu'il sera toujours moindre que le temps moyen des deux payements partiels.

Supposons que le premier payement doive être fait dans n années, et le second dans $(n + 2d)$ années; soit x le temps vrai du payement unique.

Nous aurons

$$\frac{2}{r^x} = \frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^{n+2d}} = \frac{1}{r^n}\left(1 + \frac{1}{r^{2d}}\right) = \frac{1}{r^{n+d}}\left(r^d + \frac{1}{r^d}\right) = \frac{1}{r^{n+d}}(r^d + r^{-d}),$$

d'où

$$\frac{r^x}{2} = \frac{r^{n+d}}{r^d + r^{-d}} \quad \text{et} \quad r^x = \frac{2\,r^{n+d}}{r^d + r^{-d}}.$$

Mais $(n + d)$ est la moyenne entre l'époque des deux payements partiels, et $(r^d + r^{-d})$ est toujours (*) plus grand que 2;

(*) Comme le carré d'un nombre réel, positif ou négatif, est toujours positif, le carré de $(r^d - 1)$ est toujours plus grand que zéro; nous avons donc

$$(r^d - 1)^2 > 0,$$

ou, en développant,

$$r^{2d} - 2r^d + 1 > 0,$$

et, en divisant par r^d, nous obtenons

$$r^d - 2 + r^{-d} > 0, \quad \text{d'où} \quad r^d + r^{-d} > 2.$$

par conséquent,

$$r^x < r^{n+d} \quad \text{et} \quad x < n + d.$$

Exemple XXV. — *On suppose que* 1000^{fr} *doivent être acquittés en deux payements partiels, le premier dans* 7 *ans et le deuxième dans* 43 *ans : à quelle époque, l'intérêt étant de* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100, *la dette entière de* 1000^{fr} *devra-t-elle être acquittée en un seul payement?*

La valeur actuelle des deux payements de 500^{fr} chacun est de 442^{fr},7445; par conséquent,

$$\begin{aligned} \log S &= 3, \\ \log V &= 2,64615 \\ \hline (\log S - \log V) \text{ ou } \log\frac{S}{V} &= 0,35385 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\log\frac{S}{V} \text{ ou } \log^2 &= 9,54882 \\ \log\log r \text{ ou } \log^2 r &= 8,28140 \\ \hline \log x &= 1,26742 \end{aligned}$$

$$x = 18,510 \text{ ou } 18 \text{ ans, } 186 \text{ jours.}$$

Ainsi la première somme sera acquittée 11 ans 186 jours plus tard, et la deuxième 24 ans 179 jours plus tôt. Comme preuve de l'exactitude de ce résultat, on trouvera que l'intérêt, pendant 11 ans 186 jours, des premiers 500^{fr} est égal à l'escompte de 500^{fr} payables dans 24 ans 179 jours, en prenant $4\frac{1}{2}$ pour 100 pour le taux d'intérêt.

§ XIV. — Escomptes usuels; escompte commercial.

Dans la formule (2),

$$p = \frac{1}{(1+t)^n} \quad \text{ou} \quad p = (1+t)^{-n},$$

qui exprime la valeur actuelle de 1^{fr} payable au bout de n années; si nous développons, d'après le théorème du binôme,

$(1+t)^{-n}$ en une suite de termes ordonnés suivant les puissances croissantes de t, nous obtiendrons

$$p = 1 - nt + \frac{n(n+1)}{2} t^2 \ldots.$$

Si nous supprimons tous les termes de cette série à l'exception des deux premiers, nous aurons

$$p = 1 - nt$$

pour la valeur actuelle de 1^{fr} payable dans n années, et, comme $D = 1 - p$, nous aurons

$$D = 1 - (1 - nt) = nt:$$

c'est l'escompte commercial.

Or, comme nt exprime l'intérêt simple pendant n années, l'escompte commercial n'est autre chose que l'intérêt de la somme ou dette totale, calculé à partir du moment présent jusqu'au terme de l'échéance.

Exemple XXVI (*). — *Trouver l'escompte commercial de* 250^{fr} *payables dans un mois à* 6 *pour* 100.

$$D = 250 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{100} = 1^{fr},25.$$

Pour simplifier le calcul, 360 jours seulement sont ordinairement comptés pour 1 an. Si le capital est très-peu considérable et le terme d'échéance très-rapproché, la valeur actuelle du capital ainsi calculée diffère très-peu de sa véritable valeur actuelle. Mais, $(1+t)^{-n}$ étant toujours plus grand que $(1 - nt)$, la valeur actuelle est toujours trop faible, et l'erreur augmente avec le taux d'intérêt et le nombre des années. Il s'ensuit que la valeur actuelle pourrait devenir négative et l'escompte cherché surpasser le capital. Cette conséquence extrême fait

(*) Les banquiers et les négociants ont coutume d'ajouter au terme d'échéance trois jours, appelés *jours de grâce*.

voir d'un seul coup que la formule $D = nt$ donne lieu à objection.

Ainsi, si nous l'appliquions au taux de 5 pour 100, n étant égal à 20 ans, nous trouverions $D = 1$, c'est-à-dire que 1^{fr} payable dans 20 ans n'aurait aucune valeur actuelle.

§ XV. — Escompte a intérêt simple.

Si nous considérons de nouveau la formule $p = \frac{1}{(1+t)^n}$, et que nous développions le binôme du dénominateur, nous trouverons

$$p = \frac{1}{1 + nt + \frac{1}{2} n(n-1)t^2 + \frac{1}{2.3} n(n-1)(n-2)t^3 + \ldots}.$$

Ensuite, si nous négligeons tous les termes, excepté les deux premiers de la série, nous obtiendrons

$$p = \frac{1}{1+nt},$$

d'où

$$D = 1 - p = 1 - \left(\frac{1}{1+nt}\right) = \frac{nt}{1+nt},$$

ce qui fournit un nouveau moyen d'évaluer l'escompte avec une approximation suffisante.

Exemple XXVII. — *On demande de déterminer l'escompte de* 250^{fr} *payables dans* 1 *mois, au taux de* 6 *pour* 100.

1^{fr} devient $1^{fr},005$ au bout de 1 mois; par conséquent la valeur actuelle de 250^{fr} sera $\frac{250}{1,005} = 248^{fr},756$ et l'escompte sera 1,244.

En d'autres termes,

$$D = \frac{250 \times 0,005}{1,005} = \frac{1,25}{1,005} = 1,244.$$

Cependant, comme $(1+t)^n$ est plus grand que $1 + nt$

quand $n > 1$, et $(1 + t)^n$ plus petit que $(1 + nt)$ quand $n < 1$, la valeur actuelle déterminée par cette dernière méthode est ou trop petite ou trop grande, suivant que le capital est payable avant ou après la fin de la première année.

Pour mieux apprécier la différence entre l'escompte vrai et les deux escomptes usuels, le lecteur trouvera dans le tableau ci-joint cette différence clairement confirmée par des exemples, le taux de l'intérêt étant de 6 pour 100.

Escompte de 100 *francs à* 6 *pour* 100.

TERME d'échéance.	VÉRITABLE escompte.	ESCOMPTE com-mercial.	ESCOMPTE à intérêt simple.	TERME d'échéance.	VÉRITABLE escompte.	ESCOMPTE com-mercial.	ESCOMPTE à intérêt simple.
1 mois.	0,484	0,5	0,498	1 an.	5,660	6	5,660
2 »	0,966	1	0,990	2 ans.	11,000	12	10,714
3 »	1,446	1,5	1,478	3 »	16,038	18	15,254
4 »	1,924	2	1,961	4 »	20,791	24	19,355
6 »	2,871	3	2,913	10 »	44,161	60	37,500
8 »	3,810	4	3,846	15 »	58,273	90	47,368

TROISIÈME PARTIE.

VALEUR ACTUELLE DES ANNUITÉS IMMÉDIATES.

§ XVI. — Valeur actuelle de n annuités de 1^{fr}, avec entrée immédiate.

Le Chapitre précédent indique le moyen de déterminer la valeur actuelle d'une somme unique payable dans un temps donné; par conséquent, si l'on demande de déterminer la valeur actuelle de plusieurs payements dont les termes d'échéance sont différents, il n'y a qu'à trouver séparément la valeur actuelle de chacun des payements, et la somme de toutes ces différentes valeurs sera la valeur actuelle du payement total.

C'est ainsi que l'on calcule la valeur actuelle et le montant de toutes sortes d'annuités, certaines ou sur la vie, à terme ou perpétuelles, constantes ou variables, immédiates ou différées.

Représentons donc par

t le taux annuel de l'intérêt;
$r = (1 + t)$ la valeur de 1^{fr} augmenté de son intérêt pour 1 an;
$\varphi_{(n)}$ ou simplement φ la valeur actuelle de n annuités de 1^{fr};
α une annuité ou rente annuelle quelconque;
V la valeur actuelle de n annuités de α^{fr},

la première annuité étant supposée payable à la fin de la première année.

Calculons d'abord la valeur actuelle de n annuités de 1^{fr}, la première annuité étant payable à la fin de la première année, la deuxième annuité à la fin de la deuxième année, et la dernière annuité à la fin de la $n^{ième}$ année. La valeur actuelle de :

1^{fr} payable dans 1 an est		.....	$\frac{1}{r}$
»	»	2 ans est	$\frac{1}{r^2}$
»	»	3 ans est	$\frac{1}{r^3}$
»	»	n années est	$\frac{1}{r^n}$

Et, comme la somme de toutes ces valeurs exprimera la valeur actuelle de n annuités de 1^{fr}, nous obtiendrons

$$\varphi = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^n}.$$

Par conséquent, la valeur actuelle d'une annuité quelconque est égale à la somme des termes d'une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{r}$.

En multipliant tous les termes de cette équation par r, nous aurons

$$r\varphi = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}}$$

et, en retranchant la première équation de celle-ci,

$$r\varphi - \varphi = 1 - \frac{1}{r^n} \quad \text{ou} \quad \varphi(r-1) = 1 - \frac{1}{r^n};$$

mais

$$r = (1 + t):$$

donc

$$r - 1 = t$$

et, par conséquent,

$$\varphi t = 1 - \frac{1}{r^n};$$

d'où

$$\varphi = \frac{1 - r^{-n}}{t},$$

expression générale de la valeur actuelle de n annuités de 1^{fr}.

Puisque φ exprime la valeur actuelle d'un certain nombre d'annuités de 1^{fr}, il est clair que la valeur actuelle de toute autre annuité de α^{fr}, pour le même nombre d'années, sera égale à cette annuité multipliée par φ, c'est-à-dire

$$(8) \qquad V = \alpha\varphi = \frac{\alpha}{t}(1 - r^{-n}).$$

Le rapport entre la valeur actuelle d'une annuité quelconque et son montant annuel, ou la valeur de l'annuité divisée par l'annuité elle-même, étant appelée *nombre d'achat des années* réciproquement, nous aurons

$$(9) \qquad \alpha = \frac{V}{\varphi} = \frac{Vt}{1 - r^{-n}};$$

c'est-à-dire que l'annuité que rachètera dans un nombre n d'années une somme ou un capital donné V est égale à ce capital divisé par φ, valeur actuelle de n annuités de 1^{fr}.

Si le capital $V = 1^{fr}$ et si a exprime l'annuité rachetée par 1^{fr} dans n années, la dernière équation devient

$$a = \frac{1}{\varphi} = \frac{t}{1 - r^{-n}};$$

par conséquent

$$a\varphi = 1 \quad \text{et} \quad \log a + \log\varphi = 0\ (*),$$

c'est-à-dire que le logarithme de l'annuité que rachètera 1^{fr} dans n années est égal au complément arithmétique du logarithme de la valeur actuelle de n annuités de 1^{fr} et *vice versa*.

Ainsi, l'annuité étant de 1^{fr} pendant 9 ans et à $4\frac{1}{2}$ pour 100,

---

(*) Dans les Tables, $\log a$ est augmenté de 10 pour éviter les logarithmes à caractéristique négative.

nous aurons

$$\log \varphi = 0,8614621$$
$$\text{(Tab. 27)} \quad \log a = 9,1385379$$

Les Tables de 1 à 48 donnent les logarithmes de a, pour plusieurs taux d'intérêt et pour un nombre quelconque d'années depuis 1 jusqu'à 100.

§ XVII. — Limite des annuités.

Quand, dans l'équation $V = \frac{\alpha}{i}(1 - r^{-n})$, la valeur de n ou le nombre d'années augmente, la valeur r^{-n} diminue; et, par conséquent, la valeur actuelle de l'annuité augmente pareillement, tout en restant toujours moindre que la valeur actuelle de l'annuité perpétuelle.

Ainsi, par exemple, la valeur actuelle d'un certain nombre d'annuités de 1fr à 5 pour 100 est :

Pour	62 ans	19,0288340
»	109 »	19,9019616
»	156 »	19,9901031
»	203 »	19,9990009
»	251 »	19,9999039
»	293 »	19,9999903
»	345 »	19,9999990
»	392 »	19,9999999

Et enfin la valeur actuelle de l'annuité perpétuelle est de 20fr.

Quand, dans l'équation $\alpha = \frac{Vi}{1 - r^{-n}}$, n augmente pareillement, le dénominateur de la fraction augmente et la rente à payer annuellement diminue tout en restant toujours plus grande que l'annuité perpétuelle.

Ainsi, par exemple, l'annuité que 100fr rachèteront à 5 pour 100 est

Pour	36 ans	6,0434457
»	80 »	5,1029624
»	127 »	5,0102050
»	174 »	5,0010283

Pour 221 ans	5,0001038
» 268 »	5,0000105
» 316 »	5,0000010
» 363 »	5,0000001

et l'annuité perpétuelle égale 5.

§ XVIII. — Rapport entre les annuités perpétuelles et les annuités a terme.

On vient de démontrer que

$$V = \frac{\alpha}{t}(1 - r^{-n}) = \frac{\alpha}{t} - \frac{\alpha}{tr^n};$$

mais $\frac{\alpha}{t}$ exprime la valeur actuelle des annuités de α^{fr} quand l'annuité est perpétuelle; par conséquent :

La valeur actuelle de n annuités de α^{fr} est égale à la valeur actuelle de l'annuité perpétuelle α^{fr}, diminuée de cette même annuité perpétuelle escomptée pour n années, toutes deux étant prises au même taux.

Si $n = 1$ et $\alpha = 1$, la formule donnée plus haut devient plus simple :

$$\varphi_{(1)} = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r-1}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r-1}\right)\left(\frac{r-1}{r}\right) = \frac{1}{r};$$

d'où

$$a_1 = r.$$

Si $n = 2$, la formule devient

$$\varphi_{(2)} = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = \left(\frac{1}{r-1}\right)\left(\frac{r^2-1}{r^2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{r-1}\right)\frac{(r+1)(r-1)}{r^2} = \frac{r+1}{r^2};$$

d'où

$$a_2 = \frac{r^2}{r+1}.$$

Ainsi, par exemple, deux annuités de 1^{fr}, à $4\frac{3}{4}$ pour 100, donneront

$$\log(r+1) = 0,3112239104$$
$$\text{(Tab. 57)}\quad 2\log r = 0,0403080632$$
$$\log\varphi_{(2)} = 0,2709158472$$
$$\text{(Tab. 29)}\quad \log a = 9,7290841528$$

le complément de $\log\varphi$, puisque $a = \frac{1}{\varphi}$.

On trouverait de même que

$$\varphi_{(3)} = \frac{r^2+r+1}{r^3};$$

d'où

$$a_3 = \frac{r^3}{r^2+r+1} \quad \text{et} \quad \varphi_{(4)} = \frac{r^3+r^2+r+1}{r^4};$$

d'où

$$a_4 = \frac{r^4}{r^3+r^2+r+1}.$$

Exemple XXVIII. — *Quelle est la valeur actuelle d'un bail de* 1^{fr} *par an pendant* 62 *ans, à* 5 *pour* 100?

$$V = \frac{\alpha}{t} - \frac{\alpha}{tr^n} = \frac{1}{t} - \frac{1}{tr^n}\ (\text{puisque } \alpha = 1);$$

donc

$$V = 20 - \frac{r^{-62}}{t},$$

$$\log\left(\frac{r^{-62}}{t}\right) = \log 1 - (\log r^{62} + \log t).$$

$$\log r^{62} = 1,3137365$$
$$\log t = 8,6989700$$
$$\log r^{62} + \log t = 0,0127065$$

$$\log 1 = 0$$
$$\log r^{62} + \log t = 0,0127065$$
$$\log\left(\frac{r^{-62}}{t}\right) = 9,9872935$$

$$\frac{r^{-62}}{t} = 0,9711660$$

$$V = 20 - 0,9711660 = 19^{fr},0288340:$$

c'est la valeur actuelle de l'annuité; elle équivaut à peu près au rachat de 19 ans de la rente annuelle.

§ XIX. — Calcul de la valeur actuelle et de l'annuité au moyen des formules (8) et (9).

Exemple XXIX. — *Quelle somme faudrait-il pour le rachat d'une annuité de* 8400^{fr} *d'une durée de* 37 *ans, l'intérêt étant de* $4\frac{3}{4}$ *pour* 100?

$$V = \alpha\varphi = \frac{\alpha}{t}\left(1 - r^{-n}\right).$$

$$\begin{aligned}
\log r^{-37} &= 9,2543008\\
r^{-37} &= 0,1795977\\
1 - r^{-37} &= 0,8204023\\
\log(1 - r^{-37}) &= 9,9140269\\
\log t &= 8,6766936\\
\log\varphi &= 1,2373333\\
\log\alpha &= 3,9242793\\
\log V &= 5,1616126\\
V &= 145081^{fr},70.
\end{aligned}$$

Exemple XXX. — *Chercher la valeur actuelle d'une annuité de* 8600^{fr}, *d'une durée de* 123 *ans, le taux étant de* $3\frac{7}{8}$ *pour* 100.

$$\begin{aligned}
\log r^{100} &= 1,6511037\\
\log r^{23} &= 0,3797538\\
\log r^{123} &= 2,0308575\\
\log r^{-123} &= 7,9691425\\
r^{-123} &= 0,0093141\\
1 - r^{-123} &= 0,9906859\\
\log(1 - r^{-123}) &= 9,9959360\\
\log t &= 8,5882717\\
\log\varphi &= 1,4076643\\
\log\alpha &= 3,9344985\\
\log V &= 5,3421628\\
V &= 219868^{fr},40,
\end{aligned}$$

valeur actuelle de 123 annuités de 8600^{fr}.

Exemple XXXI. — *Une somme de* 8400000^{fr} *est empruntée au taux de* $4\frac{3}{4}$ *pour* 100, *pour être remboursée en* 37 *annuités. Quelle est la somme à payer chaque année?*

$$\alpha = \frac{V}{\varphi} = \frac{Vt}{1 - r^{-n}}, \quad \log\alpha = \log V - \log\varphi.$$

$$\begin{aligned} \log V &= 6,9242793 \\ \text{(Ex. XXIX)}\quad \log\varphi &= 1,2373333 \\ \hline \log\alpha &= 5,6869460 \\ \alpha &= 486346^{fr},80. \end{aligned}$$

L'intérêt annuel de 8400000^{fr} étant, au taux de $4\frac{3}{4}$ pour 100, de 399000^{fr}, il faudrait, pour rembourser le capital, payer, outre l'intérêt, 87346^{fr},80.

Exemple XXXII. — *Quelle annuité ou revenu annuel, à verser pendant* 64 *ans, peut être racheté par* 100000^{fr}, *au taux de* $5\frac{1}{4}$ *pour* 100?

$$\alpha = \frac{V}{\varphi} = \left(\frac{t}{1 - r^{-n}}\right) V.$$

$$\begin{aligned} \text{(Tab. 33)}\quad \log r^{64} &= 1.4222146885 \\ \text{Ct}\log r^{-64} &= 8,5777853115 \\ r^{-64} &= 0,0378255552 \\ 1 - r^{-64} &= 0,9621744448 \\ \log(1 - r^{-64}) &= 9,9832538179 \\ \\ \text{Ct} &= 0,0167461821 \\ \text{(Tab. 57)}\quad \log t &= 8,7201593034 \\ \log V &= 5 \\ \hline \log\alpha &= 3,7369054855 \\ \alpha &= 5456^{fr},40, \end{aligned}$$

à peu près.

Ainsi toutes les questions qui ont rapport à ce sujet se réduisent à multiplier ou à diviser le nombre donné par φ, valeur actuelle des annuités de 1^{fr}, comme le prouvent les formules précédemment établies :

$$V = \alpha\varphi, \quad \alpha = \frac{V}{\varphi}.$$

On emploie l'une ou l'autre de ces deux formules, suivant qu'il s'agit de chercher la valeur actuelle d'une annuité, ou l'annuité elle-même, qu'une somme donnée pourra racheter au bout d'un nombre donné d'années.

C'est le dernier cas qui se présente le plus souvent, surtout quand il s'agit d'emprunter des sommes considérables remboursables après un long espace de temps et à l'aide d'*annuités constantes*, dont chacune acquitte l'intérêt de l'année, en même temps qu'elle rembourse une partie du capital.

Ce mode de remboursement d'un capital offre un grand avantage à l'emprunteur, puisqu'il lui fournit les moyens d'éteindre sa dette chaque année sans aucun effort soudain ou extraordinaire et fait disparaître peu à peu le terme du remboursement de la somme totale, terme toujours fatal, nécessitant pour ainsi dire de nouveaux sacrifices.

On peut déterminer, pour rembourser plusieurs sommes différentes, une même rente annuelle, suivant le taux qui a été stipulé; ainsi, par exemple, pour 10000^{fr}, empruntés au taux de 3 pour 100, on doit payer 1172^{fr},30; mais cette même annuité est nécessaire aussi pour rembourser 9052^{fr},20 à 5 pour 100 : c'est donc exactement la même chose d'emprunter 9052^{fr},20 à 5 pour 100 ou de rembourser 10000^{fr} à 3 pour 100, sans aucun préjudice pour les contractants, puisque, dans les deux cas, 1172^{fr},30 doivent être payés annuellement pendant le même nombre d'années.

On a souvent recours à cette méthode de transmutation de taux et de capitaux remboursables, surtout dans le cas d'obligations remboursables par loterie, pour lesquelles le capital restant fournit ce qu'on appelle *la prime de remboursement*.

§ XX. — Calcul des annuités au moyen des Tables de logarithmes.

L'emploi des logarithmes dans la plupart des calculs étant de la plus haute importance et souvent d'une absolue nécessité. j'ai présenté dans les Tables (de 1 à 48) les logarithmes de $\frac{1}{\varphi}$,

c'est-à-dire les logarithmes de l'annuité qui peut être éteinte par 1^{fr} dans un nombre donné d'années, à 48 taux d'intérêt différents et pour un nombre quelconque d'années, depuis 1 jusqu'à 100 ans.

Par conséquent, comme

$$\alpha = \frac{V}{\varphi} \quad \text{et} \quad V = \alpha\varphi,$$

si l'on veut calculer l'annuité qu'une somme donnée rachètera dans un temps donné, on doit ajouter au logarithme du capital le logarithme tabulaire de $\left(\frac{1}{\varphi}\right)$ qui correspond au nombre d'années et au taux donnés.

Si, au contraire, on demande de trouver la valeur actuelle d'une annuité quelconque, on peut ou bien soustraire du logarithme de l'annuité le logarithme tabulaire, ou bien ajouter au logarithme de l'annuité le complément du logarithme tabulaire.

Exemple XXXIII. — *Quelle annuité ou revenu annuel, d'une durée de 20 ans, pourrait-on acheter au prix de 100 000^{fr}, au taux de $3\frac{1}{2}$ pour 100?*

$$\log\alpha = \log V + \log\frac{1}{\varphi} = \log V + \log a.$$

$$\begin{aligned} \log V &= 5,0000000 \\ \text{(Tab. 19)}\quad \log a &= 8,8473325 \\ \hline \log\alpha &= 3,8473325 \\ \alpha &= 7036^{fr},10 : \end{aligned}$$

c'est l'annuité demandée.

Exemple XXXIV. — *Quelle est la valeur d'un titre de 21 ans sur une propriété dont le rapport net annuel est de 1350^{fr}, le taux de l'intérêt étant de 5 pour 100?*

$$\begin{aligned} \log 1350 &= 3,1303338 \\ \text{(Tab. 31)}\quad \log a &= 8,8920730 \\ \hline \log V &= 4,2382608 \\ V &= 17308^{fr},55. \end{aligned}$$

Exemple XXXV. — *Un capital de* 560000^{fr} *a été converti en* 28 *annuités, à* 3 *pour* 100 ; *le propriétaire de ces annuités désire les vendre à la fin de la seconde année ; combien faut-il les payer pour placer son argent à* 5 $\frac{1}{8}$ *pour* 100?

$$\log 560000 = 5,7481880$$
$$\text{(Tab. 15)} \quad \log a = 8,7266720$$
$$\log x = 4,4748600$$
$$\text{(Tab. 32)} \quad \log a = 8,8479648$$
$$\log V = 5,6268952$$
$$V = 423540^{fr},80 :$$

c'est la valeur cherchée.

Ainsi, pour un capital de 560000^{fr}, il y aurait, à 3 pour 100, 28 annuités de 29844^{fr},20 à payer, et 26 de ces annuités valent, à 5 $\frac{1}{8}$ pour 100, 423 540^{fr},80.

§ XXI. — Interpolation des Tables.

Toutes les fois que l'on demande de calculer une annuité pour un taux qui n'est pas contenu dans les Tables, on peut le faire très-exactement, dans la plupart des cas, au moyen de l'interpolation.

En général, si l'on prenait seulement des parties proportionnelles, le logarithme de l'annuité serait trop faible, parce que les différences entre les logarithmes vont sans cesse en diminuant, à mesure que le taux ou le nombre des années augmente ; au contraire, le logarithme de la valeur actuelle serait trop grand.

Or lorsque, pour le même nombre d'années, on compare les logarithmes des annuités, en augmentant successivement le taux de $\frac{1}{8}$ pour 100, on reconnaît que les différences entre les logarithmes tabulaires successifs se succèdent, à très-peu de chose près, comme les termes d'une progression arithmétique; par conséquent, pour un accroissement au-dessous de $\frac{1}{8}$ pour 100, on peut considérer les différences entre

les logarithmes comme les termes d'une progression arithmétique.

La formule générale d'interpolation, pour les équations du second degré, devient, dans le cas d'arguments (*) équidistants,

$$y_k = y + k\Delta y + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2 y,$$

y exprimant le résultat correspondant au plus haut taux tabulaire contenu dans le taux donné, Δy, $\Delta^2 y$ les premières et secondes différences, et k étant le rapport entre la différence du plus haut taux tabulaire et les différences des arguments tabulaires ($\frac{1}{8}$ pour 100).

Exemple XXXVI. — *Chercher l'annuité que rachètera* 1 000 000^{fr} *en* 23 *ans, à* $4\frac{7}{16}$ *pour* 100.

Le taux donné étant $4\frac{7}{16} = 4\frac{3\frac{1}{2}}{8}$,

$$k = \frac{1}{2},$$

et ainsi nous trouverons dans la Table, pour 23 ans, au moyen d'une soustraction,

	y	Δy	$\Delta^2 y$ (**)
$4\frac{3}{8} =$	8,8440512		
$4\frac{4}{8}$ ou $4\frac{1}{2} =$	8,8493118	52606	— 320
$4\frac{5}{8} =$	8,8545404	52286	

par conséquent,

$$\log a = 8,8440512 + \tfrac{1}{2} \times 52606 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2} 320.$$

(*) Toute Table numérique se compose de deux suites de valeurs correspondantes, chaque valeur dans l'une des suites ayant dans l'autre une valeur qui lui correspond; la première suite forme ordinairement une progression arithmétique.

Le nombre d'après lequel une Table numérique est dressée, c'est-à-dire le nombre donné dont on cherche dans la Table le nombre correspondant, s'appelle l'*argument*, et le nombre ainsi trouvé prend le nom de *résultat tabulaire*.

(**) $\Delta^2 y$ est négatif.

$$\begin{aligned}
\log a &= 8,8440512 \\
&\quad\;\; +26303 \\
&\quad\;\; +40 \\
\text{c.-à-d. } \log a &= 8,8466855\ (*) \\
\log 1000000 &= 6 \\
\log \alpha &= 4,8466855 \\
\alpha &= 70256^{\text{fr}},34.
\end{aligned}$$

Exemple XXXVII. — *Chercher la valeur actuelle de* 52 *annuités de* 100 000^{fr}, *à* $4\frac{17}{20}$ *pour* 100.

Le taux est égal à

$$4\frac{17}{20} = 4\frac{6\frac{4}{5}}{8};$$

par conséquent,

$$k = \frac{4}{5},$$

et les Tables donnent

$$\begin{aligned}
4\tfrac{3}{4} &= 8,7174301 \quad + \quad - \\
4\tfrac{7}{8} &= 8,7261506 \quad 87205 \quad 1153 \\
5 &= 8,7347558 \quad 86052 \\
\text{donc } \log a &= 8,7174301 + \tfrac{4}{5} \times 87205 + \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}}{2} \times 1153 \\
&= 8,7174301 \\
&\qquad\quad 69764 \\
&\qquad\qquad\quad 92 \\
\log a &= 8,7244157 \\
\log 1000 &= 3 \\
\log V &= 4,2755843 \\
V &= 18861^{\text{fr}},85.
\end{aligned}$$

Exemple XXXVIII. — *Chercher l'annuité qui peut être rachetée par* 756800^{fr} *dans* 51 *ans, à* $4\frac{3}{5}$ *pour* 100.

Le taux est

$$4\frac{3}{5} = 4\frac{4\frac{4}{5}}{8}, \quad k = \frac{4}{5}.$$

(*) Rigoureusement vrai.

$$\begin{array}{lll} 4\tfrac{1}{2} = 8{,}7018469 & + & - \\ 4\tfrac{5}{6} = 8{,}7107130 & 88661 & 1156 \\ 4\tfrac{3}{4} = 8{,}7194635 & 87505 & \end{array}$$

$$\log a = 8{,}7018469 + \tfrac{4}{6} \times 88661 + \frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}}{2}\, 1156$$

$$\begin{array}{r} \log a = 8{,}7018469 \\ 70929 \\ 92 \\ \hline \log a = 8{,}7089490 \\ \log V = 5{,}8789811 \\ \hline \log \alpha = 4{,}5879301 \end{array}$$

$$\alpha = 38719^{\text{fr}},54.$$

Exemple XXXIX. — *Chercher la valeur actuelle de* 48 *annuités de* 3457^{fr}, *à* $4\,\frac{1}{3}$ *pour* 100.

Le taux

$$4\,\frac{1}{3} = 4\,\frac{2\frac{2}{3}}{8}, \quad k = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{array}{rlll} 4\tfrac{1}{4} = & 8{,}6916882 & + & - \\ 4\tfrac{3}{8} = & 8{,}7004849 & 87967 & 1085 \\ 4\tfrac{1}{2} = & 8{,}7091731 & 86882 & \\ \text{donc } \log a = & 8{,}6916882 & & \\ & +58645 & & \\ & +121 & & \\ \hline \log a = & 8{,}6975648 & & \\ \log 3457 = & 3{,}5386994 & & \\ \hline \log V = & 4{,}8411346 & & \end{array}$$

$$V = 69364^{\text{fr}},10.$$

Notons, en passant, que, dans les quatre exemples précédents, les logarithmes obtenus au moyen des parties proportionnelles seraient trop faibles de 40, 92 et 120.

§ XXII. — Amortissement et fonds d'amortissement (sinking fund).

De l'équation (8),

$$V = \frac{\alpha}{i}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right),$$

on déduit directement

$$\alpha = Vt + \frac{\alpha}{r^n}.$$

Mais Vt représente l'intérêt annuel du capital V; par conséquent, l'annuité qu'une somme donnée rachètera dans n années peut être considérée comme composée de deux parties distinctes, dont la première serait spécialement consacrée au payement de l'intérêt annuel, et la deuxième, que j'exprime par s, serait affectée au rachat graduel du capital.

Il est évident que, pour payer l'intérêt et le capital, l'annuité doit excéder l'intérêt annuel. La différence $\frac{\alpha}{r^n}$ entre l'annuité et l'intérêt annuel a reçu le nom d'*amortissement*. Dans les emprunts contractés par l'État, le remboursement du capital est effectué au moyen de fonds spéciaux, auxquels on a donné le nom de *fonds d'amortissement* (*sinking fund*), parce qu'ils sont affectés à l'extinction de la dette publique (*voir* R. Price, *Observations sur les payements réversibles*, t. I, p. 299).

On peut donc considérer l'annuité comme comprenant deux opérations distinctes :

1° Le payement à la fin de chaque année des intérêts simples et annuels du capital emprunté;

2° Le remboursement graduel du capital.

Ainsi, si l'on déduit du montant d'une annuité la somme à payer chaque année pour l'intérêt simple du capital reçu, le surplus, placé successivement à intérêts composés et au taux fixé, doit donner une somme égale au capital, remboursable conformément aux conventions faites.

Si l'on exprime par s la somme annuelle affectée au fonds d'amortissement, ou l'amortissement annuel, dont le montant reproduira le capital, on aura

$$\alpha = Vt + s,$$

et par suite, comme $s = \frac{\alpha}{r^n}$, en remplaçant dans cette équa-

tion α par sa valeur $\alpha = \frac{Vt}{1 - r^{-n}}$, on trouvera

$$s = \frac{Vt}{r^n(1 - r^{-n})}$$

ou enfin

$$(10) \qquad s = \frac{Vt}{r^n - 1}.$$

Mais α exprime l'annuité et $\frac{\alpha}{r^n}$ exprime la valeur actuelle de cette annuité à l'expiration de n années; par conséquent, l'amortissement, ou le fonds d'amortissement annuel, est égal à la valeur actuelle de la dernière annuité.

Exemple XL. — *Un emprunt de* 4500000^{fr}, *remboursables au moyen de* 73 *annuités, est contracté au taux de* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100. *Quelle somme, outre l'intérêt, faut-il payer annuellement pour racheter cet emprunt dans un temps donné?*

$$s = \frac{\alpha}{r^n} \quad \text{et} \quad \alpha = V\frac{1}{\varphi} = Va;$$

donc

$$s = \frac{Va}{r^n}.$$

$$\begin{aligned} \log 4500000 &= 6,6532125 \\ \text{(Tab. 19)} \quad \log a &= 8,5808292 \\ \text{(Tab. 19)} \quad C^t \log r^n &= 8,9093545 \\ \hline \log s &= 4,1433962 \\ s &= 13912,20. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour éteindre graduellement une dette de 4500000^{fr}, il est nécessaire de payer annuellement, outre l'intérêt qui est de 157500^{fr}, une somme de 13912^{fr},20.

Exemple XLI. — *Une personne achète, au prix de* 50000^{fr} *et pour* 60 *ans, la jouissance d'une certaine propriété; elle désire connaître quelle somme elle doit mettre de côté chaque année, à*

3 *pour* 100, *pour remplacer son capital à l'expiration du bail.*

$$s = \frac{\alpha}{r^n};$$

mais

$$\alpha = \frac{50000}{\varphi_{(60)}}:$$

donc

$$s = \frac{50000}{r^{60} \cdot \varphi_{(60)}}.$$

$$\log 50000 = 4,69897$$
$$\text{(Tab. 15)} \quad \text{Ct} \log \varphi \text{ ou } \log a = 8,55790$$
$$\text{(Tab. 15)} \quad \text{C}^{\text{t}} \log r^n = 9,22977$$
$$\log s = 2,48664$$

$$s = 306^{\text{fr}},65.$$

Le calcul de l'amortissement nous fournit un excellent moyen de confirmer et de déterminer avec un soin plus scrupuleux la valeur d'une annuité.

L'intérêt annuel d'un capital pouvant toujours être obtenu avec l'exactitude désirable, il suffit, pour trouver la valeur de l'annuité, de calculer l'*amortissement,* auquel on ajoute ensuite l'intérêt. Or, l'amortissement étant r^n fois plus petit que l'annuité, l'erreur sur le dernier chiffre de l'annuité sera r^n fois moindre que l'erreur provenant du calcul direct.

Exemple XLII. — *Afin de rembourser en* 83 *ans un capital de* 1 000000^{fr} *emprunté au taux de* $4\frac{7}{8}$ *pour* 100, *quelle somme faut-il payer chaque année?*

Calcul direct :

$$\log \alpha = \log V + \log a.$$

$$\log V = 6$$
$$\text{(Tab. 30)} \quad \log a = 8,6964123$$
$$\log \alpha = 4,6964123$$

$$\alpha = 49706^{\text{fr}},40.$$

Calcul au moyen de l'amortissement ajouté à l'intérêt :

$$\log s = \log \alpha - \log r^n.$$

$$\begin{array}{rl} & \log \alpha = 4{,}6964123 \\ \text{(Tab. 30)} & \log r^n = 1{,}7157738 \\ \hline & \log s = 2{,}9806385 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} s = & \overset{\text{fr}}{956{,}3976} & \text{(amortissement)} \\ & 48750 & \text{(intérêt annuel)} \\ \hline & 49706{,}3976 & \text{(annuité)} \end{array}$$

A mesure que le taux d'intérêt augmente, la valeur actuelle d'un certain nombre d'annuités de 1^{fr},

$$\varphi = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^n},$$

diminue; par conséquent, l'annuité

$$\alpha = \frac{V}{\varphi} = \frac{V}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^n}},$$

qu'une somme donnée V rachètera dans un nombre donné d'années, augmente en même temps que le taux d'intérêt.

L'intérêt $I = Vt$ augmente proportionnellement,

L'amortissement, au contraire, diminue, non pas proportionnellement, mais simultanément. En effet,

$$s = \frac{Vt}{r^n - 1},$$

ou bien

$$s = \frac{\alpha}{r^n} = \frac{V}{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^n}\right) r^n}$$

$$= \frac{V}{r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \ldots + r + 1} = \frac{V}{1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1}}.$$

Comme l'amortissement diminue de plus en plus et que la valeur de $\frac{1}{r^n}$ diminue également, l'annuité

$$\alpha = \frac{Vt}{1 - \frac{1}{r^n}}$$

augmente et finit, pour un très-grand taux, par être égale à Vi, c'est-à-dire par augmenter proportionnellement, lorsque r^n est suffisamment grand.

Par exemple, pour rembourser 100000^{fr} en 27 ans, il faut payer, d'après le tableau suivant :

TAUX.	INTÉRÊT ANNUEL.	AMORTISSEMET.	MONTANT de l'annuité.
1	1000 ^{fr}	3245 ^{fr}	4245 ^{fr}
2	2000	2829	4829
3	3000	2456	5456
4	4000	2124	6124
5	5000	1829	6829
6	6000	1570	7570
7	7000	1343	8343
8	8000	1145	9145
9	9000	973	9973
10	10000	826	10826

§ XXIII.

Pour présenter clairement le progrès du rachat graduel d'un emprunt, et les rapports entre le capital, l'annuité et l'amortissement, examinons d'abord le cas particulier d'un capital de 100^{fr} placés à 5 pour 100 et remboursables par quatre annuités :

$$\log 100 = 2$$
$$\text{(Tab. 31)} \quad \log a = 9{,}45027$$
$$\log \alpha = 1{,}45027$$
$$\alpha = 28^{fr}{,}201.$$

En conséquence, on payera, en échange d'un capital de 100^{fr}, quatre annuités de 28^{fr},20, dont 5 pour l'intérêt annuel et 23,20 pour l'amortissement.

L'échange de ce capital contre des annuités et l'extinction

de ce capital peuvent être considérés sous quatre chefs différents :

1. *Simple règlement de comptes à la fin de chaque année.* — L'annuité étant connue, on peut considérer l'opération à effectuer à la fin de chaque année comme un simple compte entre le créancier et le débiteur, compte qui peut être réglé sans qu'il soit besoin de faire intervenir aucune question d'intérêt composé.

	fr
Capital de la première année	100,00
Intérêt	5
Somme due à la fin de la première année	105,00
Première annuité	28,20
Capital de la deuxième année	76,80
Intérêt	3,84
Somme due à la fin de la deuxième année	80,64
Seconde annuité	28,20
Capital de la troisième année	52,44
Intérêt	2,62
Somme due à la fin de la troisième année	55,06
Troisième annuité	28,20
Capital de la quatrième année	26,86
Intérêt	1,34
Somme due à la fin de la quatrième année	28,20
Quatrième annuité	28,20
Balance à la fin de la quatrième année	00,00

Au lieu de mettre en ligne de compte l'intérêt et l'annuité, nous aurions pu simplement présenter la somme payée en à-compte à la fin de chaque année pour le rachat de l'emprunt, c'est-à-dire l'excès de l'annuité sur l'intérêt. Le capital diminuant chaque année par suite du remboursement partiel, l'intérêt diminue pareillement, et cette diminution de l'intérêt entraîne l'accroissement de l'amortissement, c'est-à-dire de la différence entre l'annuité constante et l'intérêt annuel.

	fr
Capital de la première année.....	100,00
Excès de l'annuité constante sur l'intérêt.....	23,20
Capital de la deuxième année.....	76,80
Excès de l'annuité constante.....	24,36
Capital de la troisième année.....	52,44
Excès de l'annuité constante.....	25,58
Capital de la quatrième année.....	26,86
Excès de l'annuité constante.....	26,86
Reste à la fin de la quatrième année.....	00,00

2. *L'amortissement est mis de côté et placé à intérêts composés pour reconstituer le capital à la fin des 4 années.* — Nous avons trouvé qu'on doit payer chaque année 28fr,20 dont 5 sont affectés à l'intérêt annuel et 23fr,20 au rachat graduel du capital.

Supposons maintenant que le débiteur paye seulement l'intérêt annuel jusqu'au terme fixé, et place chaque année au même taux les 23fr,20 destinés à l'amortissement. Le résultat sera :

	fr
Placés à la fin de la première année.....	23,20
Intérêt.....	1,16
Placés à la fin de la deuxième année.....	23,20
Montant au commencement de la troisième année..	47,56
Intérêt.....	2,38
Placés à la fin de la troisième année.....	23,20
Montant au commencement de la quatrième année..	73,14
Intérêt.....	3,66
Quatrième amortissement.....	23,20
Montant à la fin de la quatrième année.....	100,00

Le débiteur a donc, pendant 4 ans, payé l'intérêt annuel et les quatre amortissements annuels, de 23fr,20 chacun, ont produit 100fr au moyen desquels le capital sera remboursé.

3. *Escompte de chaque annuité particulière.* — On peut aussi,

pour confirmer l'exactitude du calcul, chercher la valeur actuelle de chaque annuité particulière. Ainsi, nous avons pour la valeur actuelle

		fr		ans	fr
De la première annuité de		28,20	payables dans	1..	26,86
De la deuxième	»	28,20	»	2..	25,58
De la troisième	»	28,20	»	3..	24,36
De la quatrième	»	28,20	»	4..	23,20

En ajoutant successivement ces valeurs, nous avons pour la valeur actuelle

	fr
De la première annuité.....	26,86
Des 2 premières annuités.....	52,44
Des 3 » »	76,80
Des 4 » »	100,00

On peut remarquer que la valeur actuelle de la dernière annuité est égale à l'amortissement ou au fonds annuel d'amortissement, et que les valeurs successives des annuités sont égales aux nombres qui représentent le capital placé chaque année.

4. *L'annuité est mise de côté et placée à intérêts composés pour fournir, à la fin du nombre donné d'années, une somme égale au montant du capital à la fin du même nombre d'années.* — Supposons maintenant qu'il n'y ait, entre le créancier et le débiteur, aucun règlement de compte avant le terme du remboursement intégral et que le débiteur, à l'expiration de chaque année, place l'annuité, et évaluons le montant du capital et celui des annuités.

Montant du capital.

	fr
Capital de la première année.....	100
Intérêt.....	5
Capital de la deuxième année.....	105
Intérêt.....	5,25
Capital de la troisième année.....	110,25
Intérêt.....	5,51
Capital de la quatrième année.....	115,76
Intérêt.....	5,79
Capital de la quatrième année.....	121,55

Montant de l'annuité.

	fr
Première annuité	28,20
Intérêt	1,41
Deuxième annuité	28,20
Montant à la fin de la deuxième année	57,81
Intérêt	2,89
Troisième annuité	28,20
Montant à la fin de la troisième année	88,90
Intérêt	4,45
Quatrième et dernière annuité	28,20
Montant de l'annuité de 28fr,20 pour 4 ans	121,55

Ainsi, à la fin de la quatrième année, le montant du capital est de 121fr,55; le montant de l'annuité est de même de 121fr,55, et les résultats sont encore en accord parfait.

Si nous prenons un autre exemple, un capital de 100000fr. à 4 pour 100, à rembourser par des annuités égales en 16 ans, nous trouvons directement :

$$\text{(Tab. 23)} \quad \log \alpha = 3,9335885,$$
$$\alpha = 8582^{fr};$$

par conséquent

Pour l'intérêt	4000
Pour les fonds d'amortissement	4582
	8582

montant de l'annuité que nous aurons à payer chaque année pendant 16 ans.

Le tableau suivant présente les différents moyens de racheter un capital, comme dans l'exemple précédent :

Rachat d'un emprunt de 100 000^{fr} *à* 4 *pour* 100
par 16 *annuités de* 8582^{fr}.

	I. Règlement de comptes a la fin de chaque année.				II. Fonds d'amortissement.	III. Escompte des annuités. Valeur actuelle de		IV. Montant a la fin de chaque année	
	Capital au commencement de l'année.	Intérêt annuel du capital.	Amortissement.	Capital laissé à la fin de l'année.	Montant à la fin de l'année.	chaque annuité.	toutes les annuités.	du capital.	de l'annuité.
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	fr	fr	fr	fr	fr	fr	fr	fr	fr
1	100000,00	4000,00	4582,00	95418,00	4582,00	8251,92	8251,92	104000,00	8582
2	95418,00	3816,72	4765,28	90692,72	9347,28	7934,54	16186,46	108160,00	17507,28
3	90652,72	3626,11	4955,89	85696,83	14303,17	7629,37	23815,83	112486,40	26789,57
4	85696,83	3427,87	5154,13	80542,70	19457,30	7335,93	31151,76	116985,86	36443,15
5	80542,70	3221,71	5360,29	75182,41	24817,59	7053,78	28205,54	121665,29	46482,88
6	75182,41	3007,30	5574,70	69607,71	30392,29	6782,48	44988,02	126531,90	56924,19
7	69607,71	2784,31	5797,69	63810,02	36189,98	6521,62	51509,64	311593,18	67783,16
8	63810,02	2552,40	6029,60	57780,42	42219,58	6270,78	57780,42	136856,91	79076,49
9	57780,42	2311,22	6270,78	51509,64	48490,36	6029,60	63810,02	142331,18	90821,55
10	51509,64	2060,39	6521,62	44988,02	55011,98	5797,69	69607,71	148024,43	103136,41
11	44988,02	1799,52	6782,48	38205,54	61794,46	5574,70	75182,41	153945,41	115739,87
12	38205,54	1528,22	7053,78	31151,76	68848,24	5360,29	80542,70	160103,22	128951,46
13	31151,76	1246,07	7335,93	23815,83	76184,17	5154,13	85696,83	166507,35	142691,52
14	23815,83	952,63	7629,37	16186,46	83813,54	4955,89	90692,72	173167,64	156981,18
15	16186,46	647,46	7934,54	8251,92	91748,08	4765,28	95418	180094,35	171842,43
16	8251,92	330,08	8251,92	0,0	100000	4582	100000	187298,13	187298,13

§ XXIV.

Pour généraliser la matière et les différents moyens de représenter l'échange d'un capital contre des annuités, on a dressé le tableau suivant, qui met en pleine lumière le mécanisme des annuités (p. 55).

Rappelons quelques-unes des formules que nous avons précédemment établies : α, c'est la rente annuelle; $s = \frac{\alpha}{r^n}$ représente la différence entre cette annuité et l'intérêt; c'est l'amortissement annuel;

$\varphi_{(n)} = \frac{1 - r^{-n}}{t}$ exprime la valeur actuelle de n annuités de 1^{fr}; enfin $\alpha\varphi_{(n)}$ représente le capital à rembourser.

Nous trouvons alors :

1. *Pour le règlement de comptes à la fin de chaque année, que :*

1° Le capital diminue progressivement et représente, à la fin de chaque année, une somme égale à la valeur actuelle d'autant d'annuités qu'il reste d'années jusqu'à l'extinction totale du capital;

2° La diminution de l'intérêt est proportionnelle à celle du capital;

3° L'*amortissement annuel*, ou le montant à payer à la fin de chaque année, outre ce qui est encore dû pour l'intérêt du capital restant, augmente progressivement et forme une progression géométrique dont la raison est r, montant de 1^{fr} pendant 1 an.

2. *Pour le montant des fonds d'amortissement, à la fin de chaque année, que :*

4° Le montant des fonds d'amortissement obtenus par le placement de la somme αr^{-n} augmente progressivement, en restant toujours égal à la différence entre le capital entier et la somme due à la fin de chaque année.

3. *Pour l'escompte des annuités, que :*

5° Les valeurs actuelles de chaque annuité forment une progression géométrique décroissante. Cette progression est la même que celle de l'amortissement, mais en sens inverse; ainsi la somme à payer pour le rachat du capital à la fin d'une année quelconque est toujours égale à la valeur actuelle de l'annuité, séparée par le même nombre d'années du terme pour le remboursement complet du capital.

6° La valeur actuelle de toutes les annuités à payer jusqu'à une certaine époque forme une série semblable à celle du capital (n° 1).

4. *Pour le montant du capital et de l'annuité, que :*

7° Le capital augmente comme les termes d'une progression géométrique (comme 3) et les termes de cette série demeurent proportionnels aux termes de la série 3;

8° Le montant de l'annuité augmente dans le même rapport que le montant des fonds d'amortissement (n° 5).

Étant donné un capital V remboursable en n années, on peut se demander quelle est, au bout de la $k^{\text{ième}}$ année, la somme remboursée z, et quel est le capital y qu'il reste à amortir. On peut se servir dans ce but des formules suivantes :

$$z = \frac{V.\varphi_{(k)}}{r^{n-k}.\varphi_{(n)}}, \quad y = \frac{V.\varphi_{(n-k)}}{\varphi_{(n)}}.$$

La première formule s'établit comme il suit. Les sommes remboursées chaque année sont égales à

$$\frac{\alpha}{r^n}, \frac{\alpha}{r^{n-1}}, \frac{\alpha}{r^{n-2}}, \ldots, \frac{\alpha}{r^{n-k+1}}.$$

Leur somme est donc, au bout de la $k^{\text{ième}}$ année,

$$\begin{aligned} z &= \frac{\alpha}{r^n} + \frac{\alpha}{r^{n-1}} + \frac{\alpha}{r^{n-2}} + \cdots + \frac{\alpha}{r^{n-k+1}} \\ &= \frac{\alpha}{r^{n-k}}\left(\frac{1}{r^k} + \frac{1}{r^{k-1}} + \frac{1}{r^{k-2}} + \cdots + \frac{1}{r}\right) = \frac{\alpha}{r^{n-k}}\varphi_{(k)}; \end{aligned}$$

et, comme $\alpha = \frac{V}{\varphi_{(n)}}$, on a

$$z = \frac{V\varphi_{(k)}}{r^{n-k}\varphi_{(n)}}.$$

Quant au capital qu'il reste à amortir au bout de la $k^{\text{ième}}$ année, il est égal à la valeur actuelle des annuités restantes; par conséquent,

$$y = \alpha\varphi_{(n-k)} = \frac{V\varphi_{(n-k)}}{\varphi_{(n)}};$$

par exemple, si $V = 100000^{\text{fr}}$, $t = 4$ pour 100, $n = 16$, $k = 5$,

on a

$$\begin{aligned}
\log 100000 &= 5 \\
\mathrm{Ct}\log\varphi_{(n)} &= 8{,}9335885 \\
\log\varphi_{(k)} &= 0{,}6485378 \\
\mathrm{Ct}\log r^{n-k} &= 9{,}8126333 \\
\hline
\log z &= 4{,}3947596 \\
z &= 24817^{\mathrm{fr}},59.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 100000 &= 5 \\
\mathrm{Ct}\log\varphi_{(n)} &= 8{,}9335885 \\
\log\varphi_{(n-k)} &= 0{,}9425277 \\
\hline
\log y &= 4{,}8761162 \\
y &= 15122^{\mathrm{fr}},41.
\end{aligned}$$

On peut aussi calculer très-facilement la somme de tous les intérêts payés pendant n années pour le capital V. Cette somme est égale à la différence entre la somme des annuités et la somme des amortissements. Or la somme des annuités est égale à αn, celle des amortissements à

$$\frac{\alpha}{r^n} + \frac{\alpha}{r^{n-1}} + \cdots + \frac{\alpha}{r} = \alpha\left(\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{r}\right) = \alpha\varphi_{(n)};$$

donc la somme des intérêts est égale à

$$\alpha n - \alpha\varphi_{(n)} = \alpha[n - \varphi_{(n)}].$$

Enfin la valeur actuelle de tous les payements du fonds d'amortissement est représentée par la formule $n\frac{\alpha}{r^{n+1}}$. En effet, le premier amortissement est $\frac{\alpha}{r^n}$, sa valeur actuelle $\frac{\alpha}{r^{n+1}}$; de même le second amortissement est $\frac{\alpha}{r^{n-1}}$, sa valeur actuelle

$$\frac{\alpha}{r^{n-1}\,.\,r^2} = \frac{\alpha}{r^{n+1}}.$$

La somme des valeurs actuelles est donc $n\frac{\alpha}{r^{n+1}}$.

Tableau d'amortissement d'un capital emprunté au taux t, au moyen de n annuités de α^{fr}.

	I. Règlement de comptes à la fin de chaque année.				II. Fonds d'amortissement. —	III. Escompte des annuités. — Valeur actuelle		IV. Montant à la fin de chaque année		V. Somme des intérêts payés à la fin de chaque année.	VI. Valeur actuelle de tous les amortissements au commencement de chaque année.
	Capital au commencement de l'année.	Annuité α^{fr} pour l'intérêt.	Annuité α^{fr} pour l'amortissement.	Capital à la fin de chaque année.	Montant des amortissements à la fin de chaque année.	de chaque annuité particulière.	de toutes les annuités payées à la fin de chaque année.	du capital.	des annuités.		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$\alpha.\varphi_{(n)}$	$\alpha t\,\varphi_{(n)}$	$\frac{\alpha}{r^n}$	$\alpha.\varphi_{(n-1)}$ ou $\frac{V.\varphi_{(n-1)}}{\varphi_{(n)}}$	$\frac{\alpha}{r^n}$ ou $\frac{V}{r^n\varphi_{(n)}}$	$\frac{\alpha}{r}$	$\frac{\alpha}{r}$	$\alpha r\,\varphi_{(n)}$	α	Vt	$\frac{n\alpha}{r^{n+1}}$
2	$\alpha.\varphi_{(n-1)}$	$\alpha t\,\varphi_{(n-1)}$	$\frac{\alpha}{r^{n-1}}$	$\alpha.\varphi_{(n-2)}$ ou $\frac{V.\varphi_{(n-2)}}{\varphi_{(n)}}$	$\frac{\alpha}{r^{n-2}}\varphi_{(2)}$ ou $\frac{V.\varphi_{(2)}}{r^{n-2}\varphi_{(n)}}$	$\frac{\alpha}{r^2}$	$\alpha.\varphi_{(2)}$	$\alpha r^2\varphi_{(n)}$	$\alpha r^2\varphi_{(2)}$	$\alpha\left[2-\frac{\varphi_{(2)}}{r^{n-2}}\right]$	$\frac{(n-1)\alpha}{r^n}$
3	$\alpha.\varphi_{(n-2)}$	$\alpha t\,\varphi_{(n-2)}$	$\frac{\alpha}{r^{n-2}}$	$\alpha.\varphi_{(n-3)}$ ou $\frac{V.\varphi_{(n-3)}}{\varphi_{(n)}}$	$\frac{\alpha}{r^{n-3}}\varphi_{(3)}$ ou $\frac{V.\varphi_{(3)}}{r^{n-3}\varphi_{(n)}}$	$\frac{\alpha}{r^3}$	$\alpha.\varphi_{(3)}$	$\alpha r^3\varphi_{(n)}$	$\alpha r^3\varphi_{(3)}$	$\alpha\left[3-\frac{\varphi_{(3)}}{r^{n-3}}\right]$	$\frac{(n-2)\alpha}{r^{n-1}}$
k	$\alpha.\varphi_{(n-k+1)}$	$\alpha t\,\varphi_{(n-k+1)}$	$\frac{\alpha}{r^{n-k+1}}$	$\alpha.\varphi_{(n-k)}$ ou $\frac{V.\varphi_{(n-k)}}{\varphi_{(n)}}$	$\frac{\alpha}{r^{n-k}}\varphi_{(k)}$ ou $\frac{V.\varphi_{(k)}}{r^{n-k}\varphi_{(n)}}$	$\frac{\alpha}{r^k}$	$\alpha.\varphi_{(k)}$	$\alpha r^k\varphi_{(n)}$	$\alpha r^k\varphi_{(k)}$	$\alpha\left[k-\frac{\varphi_{(k)}}{r^{n-k}}\right]$	$\frac{(n-k+1)\alpha}{r^{n-k+2}}$
$n-2$	$\alpha.\varphi_{(3)}$	$\alpha t\,\varphi_{(3)}$	$\frac{\alpha}{r^3}$	$\alpha.\varphi_{(2)}$ ou $\frac{V.\varphi_{(2)}}{\varphi_{(n)}}$	$\frac{\alpha}{r^3}\varphi_{(n-2)}$ ou $\frac{V.\varphi_{(n-2)}}{r^2\varphi_{(n)}}$	$\frac{\alpha}{r^{n-2}}$	$\alpha.\varphi_{(n-2)}$	$\alpha r^{n-2}\varphi_{(n)}$	$\alpha r^{n-2}\varphi_{(n-2)}$	$\alpha\left[n-2-\frac{\varphi_{(n-2)}}{r^2}\right]$	$\frac{3\alpha}{r^4}$
$n-1$	$\alpha.\varphi_{(2)}$	$\alpha t\,\varphi_{(2)}$	$\frac{\alpha}{r^2}$	$\alpha.\varphi_{(1)}$ ou $\frac{V.\varphi_{(1)}}{\varphi_{(n)}}$	$\frac{\alpha}{r}\varphi_{(n-1)}$ ou $\frac{V.\varphi_{(n-1)}}{r\varphi_{(n)}}$	$\frac{\alpha}{r^{n-1}}$	$\alpha.\varphi_{(n-1)}$	$\alpha r^{n-1}\varphi_{(n)}$	$\alpha r^{n-1}\varphi_{(n-1)}$	$\alpha\left[n-1-\frac{\varphi_{(n-1)}}{r}\right]$	$\frac{2\alpha}{r^3}$
n	$\alpha.\varphi_{(1)}=\frac{\alpha}{r}$	$\alpha t\,\varphi_{(1)}=\frac{\alpha t}{r}$	$\frac{\alpha}{r}$	0	V	$\frac{\alpha}{r^n}$	$\alpha.\varphi_{(n)}$	$\alpha r^n\varphi_{(n)}$	$\alpha r^n\varphi_{(n)}$	$\alpha[n-\varphi_{(n)}]$	$\frac{\alpha}{r^2}$

Avant de terminer ce Chapitre, nous allons déterminer, à l'aide de formules très-simples :

1° La valeur actuelle φ' de $(n+1)$ annuités de 1^{fr}, étant donnés le taux d'intérêt et la valeur actuelle φ de n annuités de 1^{fr};

2° L'annuité a' par laquelle on peut amortir un capital de 1^{fr} en $(n+1)$ années, étant donnée l'annuité a par laquelle on peut amortir 1^{fr} en n années;

3° L'amortissement d'une année quelconque par rapport à celui de l'année précédente.

1° $\varphi' = \frac{\varphi+1}{r}$. En effet,

$$\varphi = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right),$$

d'où

$$t\varphi = 1 - \frac{1}{r^n}.$$

De même

$$\varphi' = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{r^{n+1}}\right),$$

d'où

$$t\varphi' = 1 - \frac{1}{r^{n+1}} \quad \text{et} \quad rt\varphi' = r - \frac{1}{r^n}.$$

En retranchant la première équation de cette dernière, on obtient

$$tr\varphi' - t\varphi = r - 1 = t, \quad r\varphi' - \varphi = 1, \quad r\varphi' = \varphi + 1 \quad \text{et} \quad \varphi' = \frac{\varphi+1}{r}.$$

2° $a' = \frac{ar}{1+a}$. En effet,

$$\varphi = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \varphi' = \frac{1}{a'}.$$

La formule $\varphi' = \frac{\varphi+1}{r}$ peut donc s'écrire

$$\frac{1}{a'} = \frac{\frac{1}{a}+1}{r} = \frac{\frac{1+a}{a}}{r} = \frac{1+a}{ar},$$

d'où

$$a' = \frac{ar}{1+a}.$$

On peut écrire cette dernière formule sous la forme

$$a' = r - \frac{r}{1+a}.$$

En effet

$$a' = \frac{ar}{1+a} = \frac{ar+r-r}{1+a} = \frac{r(1+a)-r}{1+a} = r - \frac{r}{1+a}.$$

Réciproque. — L'équation $\varphi' = \frac{\varphi+1}{r}$ donne

$$\varphi = \varphi' r - 1,$$

c'est-à-dire, si $\varphi' = \varphi_{(n)}$ et $\varphi = \varphi_{(n-1)}$, on a

$$\varphi_{(n-1)} = r\varphi_{(n)} - 1.$$

Cette formule est très-utile pour construire la Table qui donne la valeur actuelle de l'annuité de 1^{fr} par an. On commence par le dernier terme, calculé directement au moyen des logarithmes, puis on multiplie chaque terme par la raison, en retranchant chaque fois l'unité du produit.

De même l'équation $a' = \frac{ar}{1+a}$ donne

$$a' + a'a = ar, \quad ar - aa' = a', \quad a(r-a') = a';$$

enfin

$$a = \frac{a'}{r-a'}.$$

On peut généraliser ces formules et les appliquer à V et V', α et α', V étant la valeur actuelle de n annuités de α^{fr}, et V' la valeur actuelle de $(n+1)$ annuités de α^{fr}, α étant l'annuité par laquelle on peut amortir V dans n années et α' l'annuité par laquelle on peut amortir V dans $(n+1)$ années.

L'équation $\varphi' = \frac{\varphi + 1}{r}$ donnerait

$$V' = \frac{V + \alpha}{r}.$$

En effet,

$$V = \frac{\alpha}{t} - \frac{\alpha}{tr^n},$$

d'où

$$Vt = \alpha - \frac{\alpha}{r^n};$$

de même

$$V' = \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^{n+1}}\right) = \frac{\alpha}{t} - \frac{\alpha}{tr^{n+1}},$$

d'où

$$V't = \alpha - \frac{\alpha}{r^{n+1}} \quad \text{et} \quad rV't = \alpha r - \frac{\alpha}{r^n}.$$

On a donc

$$rV't - Vt = \alpha r - \alpha = \alpha(r - 1) = \alpha t,$$

d'où

$$rV' - V = \alpha, \quad rV' = V + a, \quad V' = \frac{V + \alpha}{r}.$$

Réciproquement,

$$V = V'r - \alpha.$$

L'équation $a' = \frac{ra}{1 + a}$ donnerait

$$\alpha' = \frac{Vr\alpha}{V + \alpha}.$$

En effet,

$$\frac{V}{\alpha} = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right),$$

d'où

$$\frac{Vt}{\alpha} = 1 - \frac{1}{r^n}.$$

De même,

$$\frac{V}{\alpha'} = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{r^{n+1}}\right);$$

donc

$$\frac{Vt}{\alpha'} = 1 - \frac{1}{r^{n+1}} \quad \text{et} \quad \frac{Vtr}{\alpha'} = r - \frac{1}{r^n};$$

donc

$$\frac{Vtr}{\alpha'} - \frac{Vt}{\alpha} = r - 1 = t; \quad \frac{Vr}{\alpha'} - \frac{V}{\alpha} = 1;$$

$$\frac{Vr}{\alpha'} = 1 + \frac{V}{\alpha} = \frac{\alpha + V}{\alpha}, \quad \frac{\alpha'}{Vr} = \frac{\alpha}{V + \alpha};$$

enfin

$$\alpha' = \frac{Vr\alpha}{V + \alpha}.$$

Réciproquement,

$$Vr\alpha = \alpha\alpha' + V\alpha', \quad Vr\alpha - \alpha\alpha' = V\alpha',$$

$$\alpha(Vr - \alpha') = V\alpha' \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{V\alpha'}{Vr - \alpha'}.$$

3° L'amortissement d'une année est toujours r fois plus grand que celui de l'année précédente.

Soient

V le capital primitif;
α l'annuité;
M le capital au commencement d'une année quelconque.

L'intérêt à payer pour l'année en question est égal à Mt. Il reste comme à-compte pour l'amortissement

$$\alpha - Mt = R.$$

L'année suivante, on doit

$$M - (\alpha - Mt) = M - \alpha + Mt = M(1 + t) - a = Mr - \alpha.$$

L'intérêt de cette somme est égal à

$$(Mr - \alpha)\, t = Mrt - \alpha t.$$

L'annuité étant α, il reste pour l'amortissement

$$\begin{aligned}\alpha - (Mrt - \alpha t) &= \alpha + \alpha t - Mrt \\ &= \alpha(1 + t) - Mrt = \alpha r - Mrt = (\alpha - Mt)\, r = Rr\end{aligned}$$

§ XXV. — Annuités pour lesquelles le taux de l'intérêt du capital est différent du taux de l'intérêt du fonds d'amortissement.

Jusqu'ici nous avons supposé que le taux d'extinction du capital était le même que le taux d'emprunt, mais souvent ces deux taux sont différents.

Il peut arriver que le créancier, peu disposé à accepter des remboursements successifs et partiels, réclame pour une époque déterminée le remboursement intégral du capital, et que le débiteur, pour éteindre sa dette au moyen de payements annuels, soit obligé de placer ailleurs et à des conditions différentes le surplus de son annuité.

Ou encore, les remboursements partiels, profitables au débiteur, peuvent être préjudiciables au créancier, qui reçoit en faibles portions le capital qu'il a prêté en entier et peut courir le risque de laisser stérile ce capital, qu'il aurait pu placer autrement en toute sécurité durant la période pour laquelle l'emprunt a été contracté. Le créancier peut donc consentir à des remboursements partiels, mais en même temps exiger pour ces payements un taux moins élevé, afin de contre-balancer le dommage qu'il pourrait éprouver.

Dans les deux cas, le payement de l'intérêt annuel et le remboursement du capital renferment deux comptes particuliers, indépendants, pour ainsi dire, l'un de l'autre : le payement de l'intérêt, et le placement annuel d'une somme fixe qui, à l'échéance du terme déterminé pour le remboursement, doit reconstituer une somme égale au capital emprunté. Il est de toute évidence que, dans ces deux opérations, les taux peuvent être très-différents.

Soient

V le capital prêté pour n années, ou la valeur actuelle de l'annuité;

t' le taux d'intérêt de ce capital;

t le taux d'extinction, ou le taux auquel le débiteur peut placer le surplus de son annuité;

a l'annuité qui sera rachetée par 1^{fr} dans n années à ce taux;

A l'annuité payée par le débiteur pendant n années pour l'intérêt et l'amortissement.

L'annuité A comprendra : 1° l'intérêt annuel du capital V au taux $t' = Vt'$; 2° la somme s nécessaire chaque année pour produire ce capital en n années, au taux t; cette dernière somme sera

$$s = \frac{Va}{r^n}; \tag{10}$$

par conséquent,

$$A = Vt' + \frac{Va}{r^n},$$

et réciproquement

$$V = \frac{A}{t' + \frac{a}{r^n}} = \frac{A}{t' + \frac{1}{\varphi r^n}}.$$

Exemple XLIII. — *Quelle annuité faut-il payer pendant* 29 *ans pour un capital de* 74000^{fr}, *si le taux de placement du capital est de* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100 *et le taux d'extinction de* $3\frac{1}{4}$ *pour* 100?

$$A = Vt' + \frac{Va}{r^n} = Vt' + s,$$

$$Vt' = 3330^{fr}, \quad \log s = \log V + \log a - \log r^n.$$

$$\begin{aligned} \log 74000 &= 4,86923 \\ \text{(Tab. 17)}\quad \log a &= 8,73051 \\ \text{Ct} \log r^n &= 9,59719 \\ \hline \log s &= 3,19693 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= 1573^{fr},70 \\ Vt' &= 3330 \\ \hline A &= 4903,70 \end{aligned}$$

Ainsi il faudra payer annuellement 1573^{fr},70 pour éteindre le capital. En effet, 1573^{fr},70 placés à la fin de chaque année, pendant 29 ans, au taux de 3 $\frac{1}{4}$ pour 100, donnent 74000^{fr}; l'intérêt de 74000^{fr} à 4 $\frac{1}{2}$ pour 100 étant de 3330^{fr}, l'annuité à payer chaque année est de 4903^{fr},70.

Exemple XLIV. — *Une personne désire louer pour* 10 *ans une propriété, dont le revenu net est de* 10000^{fr}. *L'argent nécessaire pour payer d'une seule fois le bail de* 10 *ans pourrait être emprunté à* 5 *pour* 100, *ou bien cette personne pourrait placer ses épargnes à* 3 *pour* 100. *Combien cette personne doit-elle payer pour ce bail de* 10 *ans?*

$$V = \frac{A}{t' + \frac{a}{r^n}}, \quad A = 10000, \quad t' = 0{,}05.$$

$$\log a = 9{,}06904$$
$$\text{(Tab. 15)} \quad \log r^n = 0{,}12837$$
$$\log \frac{a}{r^n} = 8{,}94067$$

$$\frac{a}{r^n} = 0{,}08723$$
$$t' = 0{,}05$$
$$t' + \frac{a}{r^n} = 0{,}13723$$

$$\log\left(t' + \frac{a}{r^n}\right) = 9{,}13745$$
$$\log A = 4$$
$$\log V = 4{,}86255$$

$V = 72870^{fr}$, somme à payer.

Pour évaluer la somme annuelle dont le montant au bout de 10 ans à 3 pour 100 doit reproduire 72870^{fr}, nous avons la formule (10)

$$s = \frac{Va}{r^n}, \quad \log s = \log V + \log \frac{a}{r^n}.$$

$$\log V = 4,86255$$
$$\log \frac{a}{r^n} = 8,94067$$
$$\text{d'où } \log s = 3,80322$$
$$s = 6356^{fr},50,$$

c'est-à-dire que $6356^{fr},50$ placés à la fin de chaque année, à 3 pour 100, produiront dans 10 ans 72870^{fr}; le capital 72870^{fr} est donc égal à 10 annuités de 10000^{fr} :

Pour l'intérêt à 5 pour 100.....	3643,50
Pour l'extinction du capital à 3 pour 100....	6356,50
	10000,00

Exemple XLV. — *Quelle somme faut-il payer immédiatement pour le bail de* 38 *ans d'une propriété dont le revenu net est de* 5600^{fr}; *le taux d'intérêt du capital est de* $4\frac{3}{4}$ *pour* 100, *et le surplus peut être placé à* $3\frac{1}{4}$ *pour* 100.

$$V = \frac{A}{t' + \frac{a}{r^n}}.$$

$$\log a = 8,6646837$$
$$\log r^n = 0,5278223$$
$$\log ar^{-n} = 8,1368614$$

$$ar^{-n} = 0,01370445$$
$$t' = 0,0475$$
$$t' + ar^{-n} = 0,06120445$$

$$\log(t' + ar^{-n}) = 8,7867830$$
$$\log 5600 = 3,7481880$$
$$\log V = 4,9614050$$

$V = 91496^{fr},60$, valeur cherchée.

Mais, pour rembourser cette somme à $3\frac{1}{4}$ pour 100, il faut payer $1253^{fr},91$ pendant 38 ans; donc

Pour l'intérêt à $4\frac{3}{4}$ pour 100.....	4346,09
Pour l'extinction du capital à $3\frac{1}{4}$ pour 100...	1253,91
Doivent être payés chaque année.....	5600

§ XXVI. — Calcul du nombre des annuités.

Pour calculer le nombre des annuités, il suffit de transformer la formule

$$V = \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right);$$

elle devient en effet

$$V = \frac{\alpha}{t} - \frac{\alpha}{tr^n},$$

d'où

$$\frac{\alpha}{tr^n} = \frac{\alpha}{t} - V = \frac{\alpha - Vt}{t},$$

$$\frac{tr^n}{\alpha} = \frac{t}{\alpha - Vt}, \quad r^n = \frac{\alpha}{\alpha - Vt},$$

et, en faisant usage des logarithmes,

$$n = \frac{\log \frac{\alpha}{\alpha - Vt}}{\log r}.$$

Mais α est égal à l'annuité, Vt exprime l'intérêt annuel du capital, et $(\alpha - Vt)$ est égal à la différence entre l'annuité et l'intérêt annuel, c'est-à-dire au fonds d'amortissement représenté par s; par conséquent,

$$n = \frac{\log \frac{\alpha}{s}}{\log r}.$$

Exemple XLVI. — *En combien d'années un capital de* 10000000^{fr} *pourra-t-il être amorti par une annuité de* 650514^{fr},40, *l'intérêt étant de* 5 *pour* 100 *par an?*

Capital V.....	10000000^{fr}
Intérêt annuel, 5 pour 100.....	500000
Annuité α.....	650514,40
Amortissement $s = \alpha - Vt$.....	150514,40

$$n = \frac{\log \frac{\alpha}{s}}{\log r}.$$

$$\log \alpha = 5,8132570$$
$$\log s = 5,1775780$$
$$\log \frac{\alpha}{s} = 0,6356790$$
$$\text{(Tab. 57)} \quad \log r = 0,0211893$$
$$n = \frac{0,6356790}{0,0211893}$$
$$n = 30 \text{ ans.}$$

On pourrait aussi calculer n au moyen des Tables. En effet, on aurait

$$\log r^n = 0,6356790.$$

La Table 31 donne $30 = n$ pour le nombre d'années correspondant à ce logarithme.

Exemple XLVII. — *Au bout de combien d'années une annuité de* 1800^{fr} *peut-elle amortir un capital de* 28 464^{fr},81 *au taux de* 4 $\frac{1}{2}$ *pour* 100?

Capital.....	$V =$	28464,81
Intérêt annuel, 4 $\frac{1}{2}$ pour 100.....	$Vi =$	1280,9164
Annuité.....	$\alpha =$	1800
Fonds d'amortissement.....	$s =$	519,0836

$$\log \alpha = 3,2552725$$
$$\log s = 2,7152373$$
$$\log \frac{\alpha}{s} = 0,5400352$$

$$\log r = 0,191163;$$

donc

$$n = \frac{0,5400352}{0,191163} = 28\tfrac{1}{4},$$

ou, au moyen de la Table 27,

$$\log r^{28} = 0,5352561$$
$$\text{(Tab. 51)} \quad \log r^{\frac{1}{4}} = 0,0047791$$
$$\log r^{28} + \log r^{\frac{1}{4}} = 0,5400352 = \log r^n;$$

donc $n = 28 + \frac{1}{4} = 28$ ans 3 mois.

§ XXVII. — INTERPRÉTATION ET PAYEMENT DES ANNUITÉS, QUAND LE NOMBRE EST FRACTIONNAIRE.

Si, dans la formule $V = \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)$, le nombre d'années est un nombre entier, suivi d'une fraction quelconque, et si nous supposons que ce nombre $n = m + \frac{1}{k}$, m étant un nombre entier et $\frac{1}{k}$ une fraction d'année, nous avons

$$V = \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^{m+\frac{1}{k}}}\right) = \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^m} + \frac{1}{r^m} - \frac{1}{r^{m+\frac{1}{k}}}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right) + \frac{\alpha}{t}\left(\frac{1}{r^m} - \frac{1}{r^{m+\frac{1}{k}}}\right),$$

ou

$$V = \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right) + \frac{\alpha}{tr^m} - \frac{\alpha}{tr^{m+\frac{1}{k}}} = \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right) + \frac{\alpha r^{\frac{1}{k}}}{tr^{m+\frac{1}{k}}} - \frac{\alpha}{tr^{m+\frac{1}{k}}},$$

et enfin

$$(11) \qquad V = \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right) + \frac{\alpha}{tr^{m+\frac{1}{k}}}\left(r^{\frac{1}{k}} - 1\right).$$

Or $\left(r^{\frac{1}{k}} - 1\right)$ est égal à l'intérêt composé de 1^{fr} pendant $\frac{1}{k}$ d'année et $\frac{\alpha}{t}$ exprime le capital qui donne α^{fr} d'intérêt, ou la valeur actuelle d'une annuité perpétuelle de α^{fr}; par conséquent $\frac{\alpha}{t}\left(r^{\frac{1}{k}} - 1\right)$ est égal à l'intérêt composé, pendant $\frac{1}{k}$ d'année, de la somme qui donne α^{fr} d'intérêt par an, et $\frac{\alpha}{tr^{m+\frac{1}{k}}}\left(r^{\frac{1}{k}} - 1\right)$ représente la valeur actuelle de cet intérêt composé payable dans m années et $\frac{1}{k}$ d'année.

Ainsi la valeur V de l'annuité α^{fr} pour un nombre fractionnaire d'années comprend : 1° m annuités de α^{fr} avec entrée

immédiate ; 2° à l'expiration du terme final fixé pour l'extinction du capital, une somme égale à l'intérêt composé pour $\frac{1}{k}$ d'année d'un capital dont l'intérêt annuel est égal à α^{fr}.

Ainsi, dans le dernier exemple XLVII, nous avons trouvé qu'un capital de $28464^{fr},81$, à $4\frac{1}{2}$ pour 100, serait amorti, au moyen d'annuités de 1800^{fr}, en $28\frac{1}{4}$ ans ; mais le capital qui, à $4\frac{1}{2}$ pour 100, donne 1800^{fr} d'intérêt par an, est de 40000^{fr}, et l'intérêt composé de ce capital pendant 3 mois est (exemple XIV) de $442^{fr},60$; par conséquent, en échange d'un capital de $28464^{fr},81$, on payera 28 annuités de 1800^{fr}, et 3 mois après, $442^{fr},60$.

Pour confirmer l'exactitude de ce calcul :

	fr
Valeur actuelle de 28 annuités de 1800^{fr}.....	28337,17
Valeur actuelle de $442^{fr},60$ payables dans 28 ans 3 mois..	127,64
Ces deux sommes ajoutées donnent.....	28464,81

comme plus haut ; ou encore

	fr
Montant du capital dans l'espace de 28 ans.....	97625,76
Montant de 28 annuités dans le même temps.....	97188,00
Différence au profit du créancier.....	437,76
Qui deviennent au bout de 3 mois.....	442,60

Nous avons trouvé (exemple XX) que l'escompte de 40000^{fr} payables dans 3 mois est égal à $437^{fr},76$ et que l'intérêt de ce même capital pour 3 mois (exemple XIV), intérêt qui est égal au montant de l'escompte (§ X), est égal à $442^{fr},60$.

D'ailleurs, la formule (11) montre qu'en général le reste de la somme due, après le payement de la dernière annuité, est égal à l'escompte de l'intérêt composé produit, pendant la fraction d'année restante, par la valeur actuelle $\frac{\alpha}{i}$ de l'annuité perpétuelle α^{fr}.

La formule (11) peut être remplacée par la suivante, qui ne donne qu'une valeur approchée :

$$V = \alpha . \varphi_{(n)} + \frac{\alpha}{k} . r^{-n}.$$

Exemple XLVIII. — *Combien faudra-t-il d'annuités de* 9450^{fr} *pour rembourser un capital de* 112493^{fr}, *au taux de* $5\frac{1}{4}$ *pour* 100?

Capital.....	$V =$	112493^{fr}
Intérêt annuel à $5\frac{1}{4}$ pour 100.	$Vt =$	5905,88
Annuité.....	$\alpha =$	9450
Fonds d'amortissement....	$s =$	3544,12

$$\log\alpha = 3,97543$$
$$\log s = 3,54951$$
$$\log\frac{\alpha}{s} = 0,42592$$
$$\text{(Tab. 33)}\quad \log r^{19} = 0,42222$$
$$370$$
$$\text{(Tab. 51)}\quad \log r^{\frac{1}{6}} = 370.$$

Le nombre n cherché est donc 19 ans et 2 mois.

L'intérêt simple pour 2 mois, correspondant à un intérêt annuel de 9450^{fr}, serait de 1575^{fr}.

$$\log 1575 = 3,19728$$
$$\text{(Tab. 63) (*)}\quad \log P_6 = 9305$$
$$\log \text{ de l'intérêt} = 3,187975$$
$$\text{Intérêt} = 1541,61.$$

(*) Pour trouver l'intérêt composé, pour $\frac{1}{k}$ d'année, du capital qui donne α^{fr} d'intérêt annuel, on peut opérer comme il suit :

On cherche l'intérêt simple, pour $\frac{1}{k}$ d'année, correspondant à un intérêt annuel de α^{fr}, et l'on retranche du logarithme de cet intérêt simple celui du facteur constant P_k. En effet, l'intérêt composé dont il s'agit dans l'exemple en question est égal à $\frac{9450}{t}(r^{\frac{1}{6}}-1)$. Je multiplie et je divise cette quantité par 6, ce qui donne $\frac{9450}{6.t}(r^{\frac{1}{6}}-1)6$; mais $\frac{9450}{6}$ est l'intérêt simple pour deux mois et $\frac{6(r^{\frac{1}{6}}-1)}{t} = \frac{1}{P_6}$, puisque $P_6 = \frac{\frac{t}{6}}{r^{\frac{1}{6}}-1}$. Il faut donc, pour calculer cet intérêt composé, retrancher du logarithme de l'intérêt simple celui du facteur constant P_6.

Pour mettre en évidence l'exactitude de ce calcul :

Valeur actuelle de 19 annuités de 9450^{fr}.....	$111914^{fr},84$
Valeur actuelle de $1541^{fr},61$ payables dans 19 ans et 2 mois.....	578,16
Les deux valeurs ajoutées.....	112493

Exemple XLIX. — *Combien faudra-t-il d'années pour rembourser un capital de* 50000^{fr} *en payant* 3000^{fr} *par an, le taux d'intérêt étant de* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100?

Capital.....	$V = 50000^{fr}$
Intérêt.....	$Vt = 1750$
Annuité.....	$\alpha = 3000$
Amortissement.....	$s = 1250$

$$\log\frac{\alpha}{s} = 0,38021.$$

$$\log^2\frac{\alpha}{s} = 9,58002$$

$$\text{(Tab. 57)}\quad \log^2 r = 8,17436$$

$$\log n = \log^2\frac{\alpha}{s} - \log^2 r = 9,58002 - 8,17436$$

$$\log n = 1,40566$$

$$n = 25^{ans},448 \text{ (25 ans } 163\tfrac{3}{4} \text{ jours).}$$

3000^{fr} d'intérêt par an correspondent à $1333^{fr},07$ d'intérêts composés pour $163\frac{3}{4}$ jours; par conséquent, on payera 3000^{fr} par an pendant 25 ans et, 164 jours après, $1333^{fr},07$.

Vérification :

Valeur actuelle de 25 annuités de 3000^{fr}.....	$49444^{fr},54$
Valeur actuelle de $1333^{fr},07$ payables dans $25^{ans},448$..	555,46
Valeur totale....	50000

§ XXVIII. — Application de la Table I au calcul des années.

Si le nombre d'années est un nombre entier, ou s'il doit être évalué approximativement à une fraction d'année près, on peut le trouver par une simple soustraction dans les Tables

de 1 à 48. Il suffit pour cela de calculer le logarithme de $\frac{\alpha}{V}$, de le chercher dans la Table qui correspond au taux donné et de prendre le nombre n d'années correspondant à ce logarithme. On sait, en effet, que

$$\alpha = \frac{V}{\varphi},$$

d'où

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\alpha}{V};$$

mais

$$\frac{1}{\varphi} = a,$$

donc

$$a = \frac{\alpha}{V} \quad \text{et} \quad \log a = \log \frac{\alpha}{V}.$$

Ainsi nous avons (exemple XLVI)

$$\begin{aligned} \log \alpha &= 5,8132570 \\ \log V &= 7 \\ \hline \log \frac{\alpha}{V} \text{ ou } \log a &= 8,8132570 \end{aligned}$$

Au taux de 5 pour 100, ce logarithme peut être trouvé exactement dans la Table 31 comme correspondant au nombre 30 d'années; l'annuité est donc exactement de 30 ans comme plus haut.

(Exemple XLVII) :

$$\begin{aligned} \log 1800 &= 3,25527 \\ \log V &= 4,45431 \\ \hline \log a &= 8,80096 \end{aligned}$$

Au taux de $4\frac{1}{2}$ pour 100, on trouve ce logarithme entre ceux des années 28 et 29; l'annuité sera donc répétée plus de 28 fois et moins de 29. Pour évaluer cette fraction d'année, nous avons :

Pour 28 ans.....	$\log a = 8,80291$
Pour 29 ans.....	$\log a = 8,79528$
Différence pour un an...	763

Mais la différence entre le logarithme que l'on a calculé et celui qui correspond à 28 ans est 19 seulement; on trouve donc pour la durée de l'annuité 28 ans $\frac{19}{76}$, comme ci-dessus.

§ XXIX. — Sur la détermination du taux de l'intérêt dans les annuités.

De toutes les questions qui se rencontrent dans la théorie des annuités, aucune n'est plus compliquée et n'exige plus de travail que le calcul du taux des annuités. Dans le cas le plus simple, c'est-à-dire dans le calcul des annuités immédiates, l'évaluation du taux exige la résolution d'une équation algébrique dont le degré est supérieur d'une unité au nombre qui exprime les années: c'est ce qui résulte de l'équation (8)

$$V = \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right),$$

quand elle est développée suivant les puissances décroissantes de r

$$r^{n+1} - \left(1 + \frac{\alpha}{V}\right) r^n + \frac{\alpha}{V} = 0 \text{ (*)}.$$

L'évaluation du taux est très-importante, parce que le taux agit comme règle dans le placement d'une somme d'argent; généralement, il peut être suffisant d'estimer le taux avec une approximation de $\frac{1}{20}$ pour 100; et c'est seulement dans quelques cas particuliers, par exemple quand on doit calculer des parités (§ LIV), qu'on exige une plus grande approximation. D'ailleurs, ce calcul peut être considérablement abrégé, parce que le taux est ordinairement compris entre 1 et 12

(*) $$V = \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right) = \frac{\alpha}{r-1}\left(\frac{r^n - 1}{r^n}\right) = \frac{\alpha r^n - \alpha}{r^{n+1} - r^n},$$

d'où

$$V r^{n+1} - V r^n = \alpha r^n - \alpha, \quad V r^{n+1} - V r^n - \alpha r^n + \alpha = 0,$$

$$r^{n+1} - r^n - \frac{\alpha}{V} r^n + \frac{\alpha}{V} = 0, \quad r^{n+1} - \left(1 + \frac{\alpha}{V}\right) r^n + \frac{\alpha}{V} = 0.$$

pour 100 par an; il est par conséquent facile de trouver une valeur approchée pour la racine, qui, au moyen de corrections consécutives, finira par être évaluée avec toute l'exactitude désirable.

Dans la plupart des cas pratiques, nos Tables de logarithmes présentent directement, au moyen d'interpolations, une précision plus grande qu'on ne l'exige; quant aux cas qui outrepassent les limites de ces Tables, on a donné des formules spéciales qui fournissent des résultats très-approximatifs. Enfin une formule servant à corriger les résultats aidera à calculer le taux d'intérêt avec la plus grande précision.

Taux de l'annuité perpétuelle. — Quand n est infini, c'est-à-dire quand l'annuité est perpétuelle, la formule (8) devient

$$V = \frac{\alpha}{t},$$

d'où

$$t = \frac{\alpha}{V};$$

et par conséquent, si l'on demande de trouver le taux d'une annuité perpétuelle avec *entrée immédiate*, il n'y a qu'à diviser le revenu annuel par la valeur de l'annuité.

Exemple L. — *La rente* 3 *pour* 100 *étant à* 98 $\frac{3}{8}$, *quel est le taux de l'intérêt?*

$$t = \frac{3}{98\frac{3}{8}} = 0,03049555,$$

ou à peu près $3^{fr},05$.

§ XXX. — Calcul du taux au moyen des Tables de logarithmes.

Quand la valeur de $\log \frac{\alpha}{V}$ est trouvée dans les Tables pour le nombre donné d'années, le taux est alors obtenu directement; si, au contraire, on ne peut pas trouver cette valeur exactement, on calcule le taux par interpolation.

Exemple LI. — *On vend, pour* 150000^{fr}, 16 *annuités de* 12873^{fr}; *quel est le taux de l'intérêt?*

$$a = \frac{\alpha}{V} = \frac{12873}{150000}.$$

$$\begin{aligned} \log\alpha &= \log 12873 = 4,1096798 \\ \log V &= \log 150000 = 5,1760913 \\ \hline \log a &= 8,9335885 \end{aligned}$$

En cherchant ce logarithme dans les Tables à la colonne 16 années, on le trouve à la Table 23, qui présente le 4 pour 100; le taux est donc de 4 pour 100 exactement.

Exemple LII. — *Déterminer à quel taux une annuité de* 1760^{fr}, *à continuer pendant* 31 *ans, serait achetée au prix de* 26800^{fr}.

$$\log a = \log\alpha - \log V.$$

$$\begin{aligned} \log\alpha &= \log 1760 = 3,24551 \\ \log V &= \log 26800 = 4,42813 \\ \hline \log a &= 8,81738 \end{aligned}$$

Ce logarithme ne se trouve pas dans la colonne de 31 ans; mais il est compris entre $5\frac{1}{8}$ et $5\frac{1}{4}$ pour 100.

En effet, nous trouvons dans les Tables, au nombre 31 pour les années:

A $5\frac{1}{8}$ pour 100.....	8,81338
A $5\frac{1}{4}$ pour 100.....	8,81963
Différence pour $\frac{1}{8}$.....	625

La différence entre le logarithme calculé et le logarithme qui correspond à $5\frac{1}{8}$ est égale à 400; le taux est donc

$$5\frac{1}{8} + \frac{400}{625} \cdot \frac{1}{8} = 5,205 \text{ pour } 100.$$

Exemple LIII. — *Une annuité de* 2750^{fr} *sera rachetée en* 22 *ans par un capital de* 38203^{fr},80; *quel est le taux?*

$$\begin{aligned} \log 2750 &= 3,43933 \\ \log V &= 4,58211 \\ \hline \log a &= 8,85722 \end{aligned}$$

Ce logarithme, pour 22 ans, est compris entre $4\frac{3}{8}$ et $4\frac{1}{2}$ pour 100. Dans les Tables, nous trouvons, pour 22 ans :

A $4\frac{3}{8}$ pour 100.....	8,85553
A $4\frac{1}{2}$ pour 100.....	8,86061
Différence pour $\frac{1}{8}$.....	508

La différence entre le logarithme calculé et le logarithme de $4\frac{3}{8}$ pour 100 est 169; par conséquent le taux est égal à

$$4\frac{3}{8}+\frac{169}{508}\cdot\frac{1}{8}=4\frac{5}{12}.$$

Exemple LIV. — *On donne* 76000^{fr} *pour* 49 *annuités de* 3800^{fr}; *quel est le taux?*

$$\log 3800 = 3,57978$$
$$\log V = 4,88081$$
$$\log a = 8,69897$$

Le taux est compris entre $4\frac{3}{8}$ et $4\frac{1}{2}$ pour 100; car nous trouvons dans la Table pour 49 ans :

A $4\frac{3}{8}$ pour 100.....	8,69782
A $4\frac{1}{2}$ pour 100.....	8,70661
Différence pour $\frac{1}{8}$.....	879

Mais la différence entre le logarithme calculé et le logarithme de $4\frac{3}{8}$ pour 100 est 115; le taux est donc

$$4\frac{3}{8}+\frac{115}{879}\cdot\frac{1}{8}=4,3912 \text{ pour } 100.$$

§ XXXI.

Il serait inutile de recourir à l'interpolation du second degré au moyen de la formule de la page 39; car, comme les Tables présentent les logarithmes des annuités pour des taux qui ne diffèrent entre eux que de $\frac{1}{8}$ pour 100, le taux obtenu par l'interpolation simple est toujours ou parfaitement exact ou tro' *grand* d'une quantité excessivement faible.

Cette erreur est d'autant moindre que le nombre des annuités est lui-même plus petit, et elle augmente d'une manière imperceptible à mesure que le taux diminue. Dans tous les exemples précédents, la différence entre le taux vrai et le taux donné par le calcul présente une erreur moindre que $\frac{1}{100.000000}$. Nous trouverons d'ailleurs (§ XXXIV) une formule, au moyen de laquelle le taux *vrai* peut être évalué avec la plus complète exactitude.

§ XXXII.

Toutes les fois que le nombre d'années ou le taux est suffisamment élevé, on peut obtenir une formule très-simple qui donne la valeur du taux avec une grande précision. Quand $(1+t)^n$ est infini, l'équation (8)

$$V = \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right),$$

qu'on peut transformer ainsi :

$$V = \frac{\alpha}{t} - \frac{\alpha}{t}(1+t)^{-n}, \quad t = \frac{\alpha}{V} - \frac{\alpha}{V}(1+t)^{-n},$$

devient

$$t = \frac{\alpha}{V}:$$

et, généralement, le taux est toujours plus petit que le rapport entre le revenu annuel et la valeur actuelle de l'annuité, et la différence entre ce rapport et le taux est d'autant moindre que $(1+t)^n$ est plus grand. Si nous remplaçons dans l'équation ci-dessus $(1+t)$ par $\left(1+\frac{\alpha}{V}\right)$, le résultat sera une valeur très-approchée du taux réel, si $(1+t)^n$ est très-grand.

Exemple LV. — *La valeur actuelle de* 120 *annuités de* 31700^{fr}

étant de 664822^{fr},30, *quel est le taux?*

$$\log \alpha = 4,50106$$
$$\log V = 5,82271$$
$$\log \frac{\alpha}{V} = 8,67835$$

$$\frac{\alpha}{V} = 0,04768;$$

$$\log\left(1+\frac{\alpha}{V}\right) = 0,02023$$
$$\log\left(1+\frac{\alpha}{V}\right)^{n} = 2,42760$$
$$\log \frac{\alpha}{V}\left(1+\frac{\alpha}{V}\right)^{-n} = 6,25075$$

$$\frac{\alpha}{V}\left(1+\frac{\alpha}{V}\right)^{-n} = 0,00018;$$

par conséquent $t = 0,04750$ ou $4\frac{3}{4}$ pour 100 (valeur vraie)

Exemple LVI. — 78 *annuités de* 100^{fr} *valent* 1955^{fr},50; *quel est le taux?*

$$\log \alpha = 2$$
$$\log V = 3,29126$$
$$\log \frac{\alpha}{V} = 8,70874$$

$$\frac{\alpha}{V} = 0,05114.$$

$$\log\left(1+\frac{\alpha}{V}\right) = 0,02166$$
$$\log\left(1+\frac{\alpha}{V}\right)^{n} = 1,6895$$
$$\log \frac{\alpha}{V}\left(1+\frac{\alpha}{V}\right)^{-n} = 7,0192$$

$$\frac{\alpha}{V}\left(1+\frac{\alpha}{V}\right)^{-n} = 0,00105;$$

par conséquent, $t = 0,05009$, ou à peu près 5 pour 100 (le taux vrai est de 5 pour 100).

Exemple LVII. — *Un bon de* 150000^{fr}, *portant* 3 *pour* 100 *d'intérêt par an et remboursable au moyen de* 50 *annuités, vaut* 56500^{fr}; *quel est le taux d'intérêt, si la rente annuelle et le taux d'intérêt ne sont payables qu'une fois par an?*

Pour résoudre cette question, évaluons d'abord le revenu annuel qui amortit 150000^{fr} en 50 ans, à 3 pour 100. Nous avons

$$\begin{aligned} \log 150000 &= 5,17609 \\ \log a &= 8,58956 \\ \hline \log \alpha &= 3,76565 \end{aligned}$$

$$\alpha = 5829^{fr},80.$$

Le problème est donc ainsi ramené au suivant : *A quel taux* 50 *annuités de* 5829^{fr},80 *valent-elles* 56500^{fr}?

$$\begin{aligned} \log \alpha &= 3,76565 \\ \log V &= 4,75205 \\ \hline \log \frac{\alpha}{V} &= 9,01360 \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha}{V} = 0,10318;$$

$$\log\left(1+\frac{\alpha}{V}\right) = 0,04265$$

$$\log\left(1+\frac{\alpha}{V}\right)^n = 2,1325$$

$$\log \frac{\alpha}{V}\left(1+\frac{\alpha}{V}\right)^{-n} = 6,8811$$

$$\frac{\alpha}{V}\left(1+\frac{\alpha}{V}\right)^{-n} = 0,00076;$$

$t = 0,10242$ (le taux vrai est égal à 10,24 pour 100).

§ XXXIII. — Formule de Baily.

Quand le nombre des années est peu considérable, la formule de Baily présente le taux avec une grande exactitude.

De l'équation (8)

$$V = \frac{\alpha}{t}\left[1 - (1+t)^{-n}\right]$$

nous déduisons

$$1 - \frac{Vt}{\alpha} = (1+t)^{-n}.$$

Si nous développons, au moyen du théorème du binôme, la quantité $(1+t)^{-n}$, en une suite de termes ordonnés suivant les puissances croissantes de t, nous aurons

$$1 - \frac{Vt}{\alpha} = 1 - nt + \frac{n(n+1)}{2}t^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}t^3 - \ldots,$$

et, après le retranchement de l'unité et la division des deux nombres par $(-nt)$,

$$(12) \qquad \frac{V}{\alpha n} = 1 - \frac{(n+1)}{2}t + \frac{(n+1)(n+2)}{2.3}t^2.$$

Comme t n'est généralement qu'une faible fraction de l'unité, nous rejetons, comme n'ayant qu'une très-faible valeur relative, tous les termes où t se trouve affecté des exposants 2, 3, ... Nous élevons les deux membres de cette dernière équation à une puissance telle que le coefficient de t puisse devenir positif et égal à l'unité, ce qui se rencontre toujours quand l'exposant est égal au réciproque du coefficient de t, mais d'un signe contraire.

En général, nous obtenons, d'après le théorème du binôme,

$$P = 1 + at + bt^2,$$
$$P^m = (1 + at + bt^2)^m = (1+at)^m + m(1+at)^{m-1}bt^2$$

ou en ne conservant que les deux premières puissances de t,

$$P^m = 1 + mat + \frac{m(m-1)}{2}a^2t^2 + mbt^2;$$

par conséquent, si $a = -\frac{n+1}{2}$,

$$b = \frac{(n+1)(n+2)}{2.3} \quad \text{et} \quad m = -\frac{2}{n+1};$$

l'équation (12) deviendra

$$\left(\frac{V}{\alpha n}\right)^{-\frac{2}{n+1}} = \left(\frac{\alpha n}{V}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$= 1 + t + \frac{\left(-\frac{2}{n+1}\right)\left(-\frac{2}{n+1}-1\right)}{2}\left(-\frac{n+1}{2}\right)\left(-\frac{n+1}{2}\right)t^2$$

$$+ \left(-\frac{2}{n+1}\right)\frac{(n+1)(n+2)}{2.3}t^2$$

$$= 1 + t + t^2\frac{\left(-\frac{2}{n+1}-1\right)\left(-\frac{n+1}{2}\right)}{2} + \left(-\frac{n+2}{3}\right)t^2$$

$$= 1 + t + t^2\frac{\left(1+\frac{n+1}{2}\right)}{2} + t^2\left(-\frac{n+2}{3}\right)$$

$$= 1 + t + t^2\left(\frac{2+n+1}{4} - \frac{n+2}{3}\right)$$

$$= 1 + t + t^2\left(\frac{6+3n+3-4n-8}{12}\right)$$

$$= 1 + t + t^2\left(\frac{1-n}{12}\right);$$

donc

$$\left(\frac{V}{\alpha n}\right)^{-\frac{2}{n+1}} = \left(\frac{\alpha n}{V}\right)^{\frac{2}{n+1}} = 1 + t + \frac{1-n}{12}t^2.$$

Si nous supposons ensuite

$$q = \left(\frac{\alpha n}{V}\right)^{\frac{2}{n+1}} - 1,$$

nous obtiendrons

$$q = t - \left(\frac{n-1}{12}\right)t^2.$$

De cette équation du second degré nous déduisons (*)

$$t = q\frac{1-\frac{n-1}{12}q}{1-\frac{n-1}{12}2q} = \frac{12-(n-1)q}{12-(n-1)2q}q.$$

(*) Lorsque dans l'équation du second degré $x + ax^2 = q$, x est une fraction et a

Le taux que l'on trouve au moyen de la formule de Baily est toujours trop grand; mais de 1 à 50 ans, et pour les taux ordinaires, l'erreur est excessivement faible.

Pour donner une idée de la précision que présente cette remarquable formule, nous allons donner les résultats auxquels elle conduit quand le taux vrai est exactement de $1\frac{3}{4}$ et 5 pour 100:

Annuité	Taux de l'intérêt.	
Pour 3 ans.....	1,75	500002
» 5 »	1,75001	500006
» 11 »	1,75001	500043
» 21 »	1,75003	500195
» 31 »	1,75007	500521
» 41 »	1,75016	501093
» 51 »	1,75027	501991
» 99 »	1,75175	513604

Exemple LVIII. — *Si l'on achète au prix de* 263439^{fr},10

---

un nombre suffisamment petit, la valeur de x présente une très-faible différence avec celle de q. Or nous avons, en toute rigueur,

$$x = \frac{q}{1 + ax}. \tag{1}$$

Si l'on remplace x par q, cette équation devient

$$x' = \frac{q}{1 + aq},$$

et, en remplaçant x par cette valeur dans l'équation (1), on a

$$x = \frac{q}{1 + a\dfrac{q}{1 + aq}} \quad \text{ou} \quad x = q\,\frac{(1 + aq)}{(1 + 2aq)}.$$

En remplaçant x par t et a par $\left(-\frac{n-1}{12}\right)$, on obtient

$$t = q\,\frac{\left(1 - \frac{n-1}{12}\,q\right)}{\left(1 - \frac{n-1}{12}\,2q\right)}.$$

une annuité de 29000^{fr} *d'une durée de* 11 *ans, quel est le taux du prix d'achat?*

$$\log \alpha = 4,46240$$
$$\log n = 1,04139$$
$$C^t \log V = 4,57932$$
$$\log \frac{\alpha n}{V} = 0,08311$$

$$\frac{1}{6} \log \frac{\alpha n}{V} = 0,01385$$
$$q = 0,03241$$
$$(n-1)\, q = 0,3241$$

$$t = q \frac{11,6759}{11,3518};$$

$$\log q = 51068$$
$$\log 11,6759 = 06729$$
$$C^t \log 11,3518 = 94493$$
$$\log t = 52290$$

$$t = 3,333 = 3\tfrac{1}{3} \text{ pour } 100.$$

§ XXXIV. — Formule corrective.

Nous allons maintenant donner une formule au moyen de laquelle on peut toujours calculer le taux avec une extrême précision.

De la formule (8),

$$V = \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right) = \frac{\alpha}{t}\left[1 - (1+t)^{-n}\right],$$

on déduit

$$\frac{Vt}{\alpha} = 1 - (1+t)^{-n}.$$

Appelons t le taux vrai, τ une valeur approchée de t et x la différence entre les taux vrai et approché, de telle sorte

que $t = \tau + x$ et r ou $1 + t = \rho + x$: on obtient

$$\frac{V}{\alpha}(\tau + x) = 1 - (\rho + x)^{-n}$$

$$\frac{V}{\alpha}(\tau + x) = 1 - \rho^{-n} + nx\rho^{-(n+1)},$$

$$\frac{V\tau}{\alpha} + \frac{Vx}{\alpha} = 1 - \rho^{-n} + nx\rho^{-(n+1)},$$

$$\frac{Vx}{\alpha} - xn\rho^{-(n+1)} = 1 - \frac{V\tau}{\alpha} - \rho^{-n},$$

$$x\left[\frac{V}{\alpha} - n\rho^{-(n+1)}\right] = 1 - \frac{V\tau}{\alpha} - \rho^{-n},$$

$$x = \frac{1 - \left(\frac{V\tau}{\alpha} + \rho^{-n}\right)}{\frac{V}{\alpha} - n\rho^{-(n+1)}}.$$

Exemple LIX. — *Quel est le taux d'intérêt de* 31 *annuités de* 1760^{fr} *au prix de* 26800^{fr} (*voir* exemple LII)?

Nous avons déjà trouvé une valeur approchée de $t = 5,205$ pour 100; par conséquent,

$$\alpha = 1760$$
$$V = 26800$$
$$n = 31$$
$$\rho = 1 + \tau = 1,05205$$

$$\log\rho = 0,02203638070$$
$$\log\rho^{31} = 0,68312780170$$
$$\log\rho^{-31} = 9,31687219830$$
$$\rho^{-31} = 0,20743030136$$
$$\frac{V\tau}{\alpha} = 0,79257954545$$
$$\frac{V\tau}{\alpha} + \rho^{-31} = 1,00000984681;$$

$$\log n = 1,4913617$$
$$\log r^{32} = 0,7051642$$
$$\log n.\rho^{-32} = 0,7861975$$

$$n\rho^{-32} = 6,112199$$

$$\frac{V}{\alpha} - n\rho^{-32} = 9,115074,$$

ou

$$x = -\frac{0,0000098\dot{4}681}{9,115074} = -0,00000108028,$$

$$t = 0,05205 + x = 0,0520489\dot{1}972;$$

le taux cherché est donc exactement

$$5,204891972 \text{ pour } 100.$$

Exemple LX. — *La valeur actuelle de* 49 *annuités de* 3800^{fr} *est* 76000^{fr}; *quel est le taux* (*voir* exemple LIV)?

Prenons la valeur approchée de t:

$$\tau = 4,3912 \text{ pour } 100;$$

alors

$$\rho = 1,043912:$$

$$\log\rho = 0,01866388992\dot{2}$$
$$\log\rho^{49} = 0,91453060618$$
$$\log\rho^{-49} = 9,08546939382$$
$$\rho^{-49} = 0,12175011884$$
$$\frac{V\tau}{\alpha} = 0,87824$$
$$\frac{V\tau}{\alpha} + \rho^{-49} = 0,99999011884$$

$$\log n = 1,6901961$$
$$\log\rho^{50} = 0,9331945$$
$$\log n\rho^{-50} = 0,7570016$$

$$n\rho^{-50} = 5,714808,$$
$$\frac{V}{\alpha} = 20, \quad \frac{V}{\alpha} - n\rho^{-50} = 14,285192,$$

ou

$$x = \frac{0,000009881\dot{1}6}{14,285192} = 0,00000069170\dot{6};$$

par conséquent,

$$t = 0,0439126917\dot{0}6 \text{ (valeur vraie du taux)}.$$

§ XXXV. — Des rentes périodiques en général.

Valeur actuelle d'annuités, payables annuellement, par semestre, par trimestre, etc., quand l'intérêt est convertible annuellement, tous les six mois, tous les trois mois, etc. — Jusqu'ici nous n'avons considéré que les cas où l'annuité et l'intérêt se payent tous deux à la fin de l'année; nous allons considérer maintenant les rentes périodiques en général, c'est-à-dire le cas où l'annuité et l'intérêt sont payables à différents termes qui ne coïncident pas entre eux, et à des intervalles de temps autres qu'une année entière. On sait qu'en général les rentes publiques et autres se payent par semestre, par trimestre ou par mois.

Les calculs relatifs aux rentes payables à différentes époques de l'année sont plus longs et plus minutieux que ceux qui concernent les annuités payables annuellement; en outre, les Tables numériques que l'on a publiées exigent de si longs calculs, que les difficultés trop sérieuses naissant de leur emploi ont obligé ceux qui s'en servaient à restreindre leurs calculs à des années entières, ce qui fournit un résultat plus ou moins inexact; tandis qu'avec nos Tables de logarithmes ces calculs deviennent très-simples dans la plupart des cas pratiques. C'est surtout par rapport à de telles questions que les avantages des Tables logarithmiques sur les Tables numériques doivent être appréciés comme ils le méritent.

§ XXXVI. — Formule générale.

Examinons d'abord le cas le plus général, et déterminons la valeur actuelle d'une annuité de α^{fr} payable k fois dans l'année, chaque payement étant $\frac{1}{k}$ de l'annuité annuelle et l'intérêt étant convertible en capital à ν intervalles égaux.

Soient donc

t le taux *nominal* de l'intérêt, convertible ν fois par an;

α la *rente annuelle* pour n années, payable par portions égales à k intervalles égaux;

V la valeur actuelle de l'annuité;

$\rho = 1^{fr}$ augmenté de son intérêt pendant $\frac{1}{k}$ d'année, c'est-à-dire pendant l'intervalle qui sépare deux payements consécutifs de la rente.

Nous aurons :

Taux nominal.....	t
Taux *vrai* de l'intérêt, convertible à chaque $\frac{1}{\nu}$ d'année.	$\frac{t}{\nu}$
Montant de 1^{fr} au bout de $\frac{1}{\nu}$ d'année.....	$1+\frac{t}{\nu}$
Montant de 1^{fr} au bout d'une année entière.....	$\left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{\nu}$
Montant de 1^{fr} à la fin de $\frac{1}{k}$ d'année, période qui sépare deux payements successifs de l'annuité.....	$\rho=\left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{k}}$

Par conséquent, la valeur actuelle de l'annuité, ou de nk payements de $\left(\frac{\alpha}{k}\right)^{fr}$, sera égale à

$$V=\frac{\alpha}{k}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^3}+\ldots+\frac{1}{\rho^{kn}}\right)=\frac{\alpha}{k}\left(\frac{1-\rho^{-kn}}{\rho-1}\right).$$

Soient, en effet,

$$x=\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^3}+\ldots+\frac{1}{\rho^{kn}},\quad x\rho=1+\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}+\ldots+\frac{1}{\rho^{kn-1}};$$

en retranchant la première équation de la seconde, on a

$$x(\rho-1)=1-\frac{1}{\rho^{kn}}=1-\rho^{-kn},$$

d'où

$$x=\frac{1-\rho^{-kn}}{\rho-1},$$

et, par conséquent,

$$V=\frac{\alpha}{k}\cdot\frac{1-\rho^{-kn}}{\rho-1}.$$

En remplaçant ρ par sa valeur $\left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{k}}$, on obtient la formule suivante :

$\frac{\nu}{k}$

$$(13) \qquad V = \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{-m}}{\left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{k}}-1}.$$

§ XXXVII.

Avant d'envisager cette formule sous un point de vue général, examinons d'abord le cas particulier où l'annuité se paye *par semestre*, tandis que l'intérêt est convertible annuellement.

Dans ce cas, nous avons

$$k = 2, \quad \nu = 1,$$

et la formule (13) devient

$$V' = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1-r^{-n}}{\sqrt{r}-1}.$$

Mais nous avons déjà trouvé que la valeur actuelle de n annuités de α^{fr} est exprimée par la formule

$$V = \frac{\alpha}{t}(1-r^{-n});$$

par conséquent, en exprimant par p_2 le rapport de deux annuités, dont la première est payable par semestre et la seconde annuellement, le nombre d'années et l'intérêt étant les mêmes, on obtient

$$p_2 = \frac{V'}{V} = \frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{r}-1}.$$

Réciproquement, α étant l'annuité payable *annuellement*,

par laquelle on peut amortir le capital V, et α' l'annuité payable *par semestre* par laquelle on peut amortir le même capital V, nous avons

$$V = \frac{\alpha'}{2} \cdot \frac{1 - r^{-n}}{\sqrt{r} - 1} \quad \text{et} \quad V = \frac{\alpha}{t}(1 - r^{-n});$$

donc

$$\frac{\alpha'}{2} \cdot \frac{1 - r^{-n}}{\sqrt{r} - 1} = \frac{\alpha}{t}(1 - r^{-n}),$$

et enfin

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\sqrt{r} - 1}{\frac{t}{2}}.$$

Mais $(\sqrt{r} - 1)$ est l'intérêt composé de 1fr pour 6 mois, et $\frac{t}{2}$ est l'intérêt simple de 1fr pour le même temps. Nous avons donc cette remarquable loi générale, établie comme il suit :

Le rapport entre les valeurs actuelles de deux annuités, dont l'une est payable par semestre et l'autre annuellement, est invariable, quel que soit le nombre des annuités, et égal au rapport entre l'intérêt simple pour 6 mois et l'intérêt composé pour le même espace de temps :

$$P_2 = \frac{V'}{V} = \frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{r} - 1} = \frac{\frac{t}{2}(\sqrt{r} + 1)}{r - 1} = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{r}) \text{ (*)}.$$

Réciproquement, le rapport entre deux annuités α' et α, par lesquelles on peut amortir le même capital, dont l'une est payable *par semestre* et l'autre *annuellement*, est constant, quel que soit le nombre des années, et égal à l'inverse du rapport ci-dessus, c'est-à-dire au rapport entre l'intérêt composé pour 6 mois et l'intérêt simple pour le même espace de temps.

Ainsi, par exemple, l'intérêt annuel étant de 5 pour 100,

(*) (Table 63.) P_2 présente le logarithme de ce rapport pour 51 taux différents.

nous avons pour 6 mois :

Intérêt simple..... $\frac{t}{2} = 0,025$

Intérêt composé..... $\sqrt{r} - 1 = 0,024695076596$

et, par conséquent,

$$\frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{r}-1} = 1,0123475383, \quad \log\frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{r}-1} = 0,0053296.$$

C'est par ce nombre qu'il faut multiplier la valeur actuelle d'une annuité pour obtenir la valeur actuelle de la même annuité, payable par moitié et par semestre. Ainsi la valeur actuelle d'une annuité de 1^{fr} par an, payable annuellement pendant 25 ans, à 5 pour 100, est, d'après les Tables, égale à 14,093944566; la valeur actuelle de la même annuité payable par semestre, l'intérêt restant le même, sera donc

$$14,093944566 \times 1,0123475383 = 14,26797009.$$

Enfin c'est par le même nombre qu'il faut diviser l'annuité α payable annuellement, par laquelle on amortit le capital V, pour obtenir l'annuité α' payable par semestre et par moitié, par laquelle on amortit le même capital V.

$$\alpha' = \alpha \cdot \frac{\sqrt{r}-1}{\frac{t}{2}} = \frac{\alpha}{P_2}. \quad \text{(Ex. LXII et LXIII.)}$$

Exemple LXI. — *Quelle est la valeur actuelle de* 29 *annuités de* 4440^{fr} *payables par moitié et par semestre, l'intérêt étant de* 5 *pour* 100 *par an?*

$$V = \alpha.\varphi.P_2, \quad \log V = \log\alpha + \log\varphi + \log P_2.$$

$$\begin{aligned} \log\alpha &= 3,6473830 \\ \log\varphi &= 1,1801567 \\ \text{(Tab. 63)} \quad \log P_2 &= 0,0053296 \\ \hline \log V &= 4,8328693 \end{aligned}$$

$V = 68056^{fr},45$ (valeur cherchée).

Exemple LXII. — *Quelle est l'annuité, payable par semestre, capable d'amortir un capital de* 6500000^{fr} *à* 5 *pour* 100, *en* 41 *ans?*

$$6500000 = V.P_2 = \alpha.\varphi.P_2,$$

d'où

$$\alpha = \frac{6500000}{\varphi.P_2} = \frac{650000.a}{P_2},$$

$$\begin{aligned} \log 6500000 &= 6,8129134 \\ \log a &= 8,7620953 \\ -\log P_2 &= -0,0053296 \\ \hline \log \alpha &= 5,5696791 \end{aligned}$$

$$\alpha = 371260^{fr},80.$$

Exemple LXIII. — *On demande de convertir en une rente semestrielle une rente annuelle de* 5600^{fr}, *payable durant un nombre quelconque d'années; combien faut-il payer, l'intérêt étant de* 5 *pour* 100?

$$\alpha.\varphi.P_2 = 5600.\varphi,$$

d'où

$$\alpha = \frac{5600}{P_2} \quad \text{et} \quad \log \alpha = \log 5600 - \log P_2.$$

$$\begin{aligned} \log 5600 &= 3,74819 \\ -\log P_2 &= -0,00533 \\ \hline \text{og}\,\alpha &= 3,74286 \end{aligned}$$

$$\alpha = 5531^{fr},75.$$

§ XXXVIII. — L'annuité et l'intérêt sont payables en même temps.

Quand l'annuité et l'intérêt sont payables en même temps ν fois par an, la formule générale devient

$$V = \frac{\alpha}{i}\left[1 - \left(1 + \frac{i}{\nu}\right)^{-\nu n}\right]. \tag{14}$$

Suivant que ν et k sont tous deux égaux à 1, 2, 4, 12, ...,

c'est-à-dire suivant que l'intérêt et l'annuité sont tous deux payables annuellement, par semestre, par trimestre ou par mois, nous avons

$$V = \frac{\alpha}{t}[1-(1+t)^{-n}], \qquad V_2 = \frac{\alpha}{t}\left[1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}\right],$$

$$V_4 = \frac{\alpha}{t}\left[1-\left(1+\frac{t}{4}\right)^{-4n}\right], \quad V_{12} = \frac{\alpha}{t}\left[1-\left(1+\frac{t}{12}\right)^{-12n}\right].$$

Si, dans la formule (8) (§ XVI), $V = \frac{\alpha}{t}[1-(1+t)^{-n}]$, l'annuité, au lieu d'être égale à α^{fr}, est de $\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{fr}$ et le taux annuel de $\frac{t}{\nu}$, la valeur actuelle devient, dans le cas de νn annuités,

$$V = \frac{\alpha}{\nu}\cdot\frac{1}{\frac{t}{\nu}}\left[1-\left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{-\nu n}\right], \quad V = \frac{\alpha}{\nu}\cdot\frac{t}{\nu}\left[1-\left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{-\nu n}\right],$$

$$V = \frac{\alpha}{t}\left[1-\left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{-\nu n}\right].$$

Par conséquent, quand l'annuité est payable en même temps que l'intérêt, la valeur actuelle de l'annuité de α^{fr} payable ν fois dans un an, chaque payement étant $\frac{1}{\nu}$ de l'annuité annuelle, est, d'une manière générale, égale à la valeur actuelle de νn annuités de $\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{fr}$, le taux d'intérêt étant $\frac{1}{\nu}$ du premier.

Cette propriété est d'une grande utilité, dans la plupart des cas, pour trouver directement, dans les Tables dressées pour le calcul de la valeur actuelle d'annuités payables annuellement, la valeur d'une rente semestrielle ou trimestrielle.

Exemple LXIV. — *Quelle est la valeur actuelle de* 30 *annuités de* 40000^{fr}, *le taux d'intérêt étant de* 6 *pour* 100, *l'annuité et l'intérêt étant payables tous les mois?*

La formule générale devient

$$V = \frac{\alpha}{t}\left[1 - \left(1 + \frac{t}{12}\right)^{-360}\right],$$

$$\log\left(1 + \frac{t}{12}\right) = \log 1{,}005 = 0{,}0021660618.$$

$$\begin{aligned}
\log 1{,}005^{360} &= 0{,}7797822 \\
\log 1{,}005^{-360} &= 9{,}2202178 \\
1{,}005^{-360} &= 0{,}1660420 \\
1 - 1{,}005^{-360} &= 0{,}8339580 \\
\log(1 - 1{,}005^{-360}) &= 9{,}9211442 \\
\log 40000 &= 4{,}6020600 \\
C^{t} \log t &= 1{,}2218487 \\
\hline
\log V &= 5{,}7450529
\end{aligned}$$

Valeur actuelle cherchée : $V = 555971^{fr},90$.

Nous trouverions de la même manière, par exemple, que la valeur actuelle de 25 annuités de 1^{fr} payables annuellement, au taux de 4 pour 100, est égale à $15^{fr},62208$.

Quand l'annuité et l'intérêt sont payables par semestre, la valeur actuelle de l'annuité est égale à la valeur actuelle de 50 annuités de $\frac{1}{2}$ franc, au taux de 2 pour 100 par an :

$$V = 15^{fr},71180.$$

Si l'annuité et l'intérêt sont payables par trimestre, la valeur actuelle de l'annuité est égale à celle de 100 annuités de $\frac{1}{4}$ franc, au taux de 1 pour 100 par an :

$$V = 15^{fr},75722.$$

Enfin, si l'annuité et l'intérêt sont payables tous les mois, la valeur actuelle de l'annuité est égale à celle de 300 annuités $\frac{1}{12}$ franc, au taux de $\frac{1}{3}$ pour 100 par an :

$$V = 15{,}78771.$$

On peut voir, par la simple lecture des formules contenues dans cette section, que la valeur actuelle d'une annuité augmente avec le nombre des payements annuels; ainsi nous

avons trouvé

$$V = 15,62208,$$
$$V_2 = 15,71180,$$
$$V_4 = 15,75722,$$
$$V_{12} = 15,78771.$$

La valeur actuelle de l'annuité serait également plus grande, si les payements avaient lieu chaque jour, etc., et ces valeurs, augmentant ainsi, approchent de plus en plus d'une *limite extrême*, qui est la valeur actuelle de l'annuité, quand les payements ont lieu à des intervalles de temps infiniment petits. C'est cette limite que nous allons maintenant déterminer.

Si ν est infini, l'expression $\left(1 + \frac{t}{\nu}\right)^{\nu}$ devient égale à ε^t, ε étant la base des *logarithmes hyperboliques*, et la formule (14) devient

$$V = \frac{\alpha}{t}(1 - \varepsilon^{-nt}).$$

Ainsi, si nous avions à trouver la valeur actuelle d'une annuité de 1^{fr} pour 25 ans, au taux de 4 pour 100, quand l'annuité et l'intérêt sont tous deux payables *d'une manière continue*, c'est-à-dire à des intervalles infiniment petits et par portions égales proportionnelles au temps, nous aurions

$$nt = 1, \quad \frac{1}{\varepsilon} = 0,36787944117, \quad 1 - \frac{1}{\varepsilon} = 0,63212055882 9,$$

et, par conséquent,

$$V = \frac{1}{0,04}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = 15^{fr},8030139707,$$

limite extrême de la valeur actuelle de l'annuité (*voir* le Tableau de la p. 100).

Si l'annuité est *perpétuelle*, toutes les formules exprimant la valeur actuelle de l'annuité sont identiques :

$$V = \frac{\alpha}{t};$$

par conséquent, la valeur actuelle d'un nombre infini d'annuités payables annuellement, par semestre, par trimestre, ou à des intervalles de temps quelconques, demeure invariable, pourvu que l'annuité et l'intérêt soient payés en même temps.

Comme $\left(1+\frac{t}{2}\right)^2=\left(1+t+\frac{t^2}{4}\right)$ est toujours plus grand que $(1+t)$, la valeur actuelle d'une annuité, quand l'intérêt et l'annuité sont payables par semestre, est toujours plus grande que la valeur actuelle de la même annuité, lorsque l'annuité et l'intérêt sont payables annuellement.

Pour la même raison, l'annuité α', payable par semestre ainsi que l'intérêt capable d'amortir un capital V, est toujours plus petite que l'annuité α, payable annuellement en même temps que l'intérêt et capable d'amortir le même capital V dans le même nombre d'années.

Soient, par exemple, l'annuité α payable annuellement, par laquelle on amortit en 25 ans un capital de 200000^{fr}, au taux de 5 pour 100, convertible annuellement, et l'annuité α' payable par semestre, par laquelle on amortit dans le même temps le même capital, au taux de 5 pour 100, convertible par semestre; on a

$$\alpha=\frac{200000}{\varphi_{(25)}} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha'}{2}=\frac{200000}{\varphi_{(50)}}.$$

$$\begin{aligned}
\log 200000 &= 5,3010300\\
C^t \log\varphi_{(25)} &= \underline{8,8509674}\\
\log\alpha &= 4,1519974\\
\alpha &= 14190,^{fr}49
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 200000 &= 5,3010300\\
C^t \log\varphi_{(50)} &= \underline{8,5472584}\\
\log\frac{\alpha'}{2} &= 3,8482884\\
\frac{\alpha'}{2} &= 7051,^{fr}61\\
\alpha' &= 14103,22.\\
\alpha &= \underline{14190,49}\\
\alpha-\alpha' &= 87,27
\end{aligned}$$

Or la *différence* entre deux valeurs actuelles correspondantes varie, pour le même taux, avec le nombre des années ; d'abord elle augmente de zéro (quand $n = 0$) jusqu'à une certaine valeur de n, pour laquelle la différence est *maximum ;* ensuite elle décroît à mesure que n augmente, jusqu'à ce qu'enfin, n devenant infini, elle s'annule entièrement.

Ainsi, si nous comparons les valeurs actuelles des annuités de 1fr, au taux de 4 pour 100, en établissant que l'annuité et l'intérêt sont tous deux payables, soit annuellement, soit par semestre, nous trouvons :

ANNÉES.	ANNUITÉ ET INTÉRÊT PAYABLES annuellement.	par semestre.	DIFFÉRENCE.
1	0,962	0,971	9
2	1,886	1,904	18
3	4,452	4,491	39
10	8,111	8,176	65
20	13,590	13,678	88
25	15,622	15,712	99
30	17,292	17,380	88
51	21,617	21,683	66
125	24,814	24,823	9
250	24,999	24,999	0

Pour trouver d'une manière générale le nombre d'années pour lequel $(V_2 - V)$, c'est-à-dire la différence entre les deux valeurs correspondantes, est *maximum*, faisons sa différentielle égale à zéro lorsque n est la variable : l'expression générale pour le *maximum*, ou la plus grande différence, devient alors

$$n = \frac{\log^2\left(1 + \frac{t}{2}\right)^2 - \log^2 r}{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)^2 - \log r}.$$

En la développant en une suite de termes ordonnés sui-

vant les puissances croissantes de t, on la convertit en l'expression suivante, expression très-simple et d'une application très-facile :

$$n = \frac{1}{t} + \frac{3}{8} - \frac{t}{16} + \ldots.$$

Le troisième terme, étant inférieur à 2 jours, peut être laissé de côté pour tous les taux usuels, les deux premiers termes étant suffisants pour assurer la plus grande exactitude. Ainsi la différence entre les valeurs actuelles, à 4 pour 100, des annuités de 1^{fr}, payables par semestre ou par année, est la plus grande lorsque

$$n = 25\tfrac{3}{8} - \tfrac{0,04}{16} = 25^{ans},372.$$

On a souvent besoin dans la pratique de connaître le rapport $\frac{V_2}{V}$, c'est-à-dire le rapport entre les valeurs actuelles d'une annuité, suivant que le payement de la rente annuelle a lieu tous les six mois ou tous les ans

Il est de toute évidence que ce rapport

$$\frac{V_2}{V} = \frac{\varphi\left(\frac{t}{2}\right)}{\varphi(t)} = \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-2n}}{1 - (1+t)^{-n}}$$

varie avec le taux d'intérêt ou avec le nombre des années.

Toutes les fois que le nombre des années est donné et constant, ce rapport est égal à l'unité quand $t = 0$; il continue alors à augmenter jusqu'à une certaine valeur de t, déterminée par l'équation

$$(1+t)^{n+1} = \frac{t}{2} + \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{2n+1};$$

pour cette valeur de t, le rapport est *maximum;* de cette valeur de t il continue ensuite à décroître, en se rapprochant de plus en plus de l'unité, son extrême limite.

Par exemple, le rapport entre les valeurs actuelles de l'annuité de 1^{fr} pour 25 ans, l'intérêt et l'annuité étant payables

par semestre ou annuellement, est comme il suit :

A 2 pour 100	.....	1,0038
A 6 »	.....	1,0064
A 10 »	.....	1,0056

Quand, au contraire, le taux d'intérêt est donné et constant, le rapport diminue continuellement, à mesure que le nombre des années augmente, et il diminue d'autant plus rapidement que le taux donné est plus élevé.

Les rapports entre les valeurs actuelles des annuités, quand les taux sont différents, forment (pour $n = 1$) une suite ascendante (entre zéro et 200 pour 100); alors, après un nombre suffisant d'années, ils forment une suite descendante. Il y a donc, entre ces deux limites, un nombre n pour lequel les rapports concernant deux taux différents sont toujours égaux; de là nous pouvons déduire ce remarquable théorème :

Si l'on donne deux taux τ et t (le premier étant le plus élevé), il arrive toujours que, pour un certain nombre d'années, les rapports entre les annuités annuelles et semestrielles sont toujours égaux.

Ainsi l'on a

$$\frac{1-\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^{-2n}}{1-(1+\tau)^{-n}} = \frac{1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}}{1-(1+t)^{-n}} \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\varphi(\tau)} = \frac{\varphi\left(\frac{t}{2}\right)}{\varphi(t)};$$

pour un nombre d'années moins considérable,

$$\frac{\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\varphi(\tau)} > \frac{\varphi\left(\frac{t}{2}\right)}{\varphi(t)},$$

et, pour un nombre d'années plus élevé,

$$\frac{\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\varphi(\tau)} < \frac{\varphi\left(\frac{t}{2}\right)}{\varphi(t)}.$$

En vue de montrer la nature des rapports entre la valeur

actuelle d'une annuité payable annuellement et la même annuité payable par semestre, j'ai présenté le tableau suivant, qui donne les logarithmes à 4 décimales de ces rapports, pour plusieurs années et différents taux d'intérêt.

ANNÉES.	TAUX DE L'INTÉRÊT POUR 100										
	1	2	3	3 ½	4	4 ½	5	5 ½	6	8	10
	0,0										
1	107	212	315	366	415	465	514	562	610	796	974
15	100	184	254	284	311	335	356	375	392	437	455
20	98	175	234	258	278	296	310	321	330	345	335
25	95	166	216	234	249	260	268	273	276	269	243
30	93	157	198	212	221	228	231	231	230	208	173
35	90	149	182	191	197	199	198	195	190	159	122
40	88	140	167	172	174	173	169	163	156	120	79
45	86	133	152	155	154	150	143	136	127	90	59
60	79	112	115	111	104	95	86	77	67	37	18
80	71	87	78	69	60	50	42	34	24	10	4
120	56	52	33	25	18	14	9	6	4	1	0
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

§ XXXIX.

En remplaçant dans la formule (13) les lettres ν et k par les nombres 1, 2, 4 et 12, nous avons déduit le tableau suivant, dans lequel est présentée, pour les cas les plus ordinaires, la valeur actuelle d'une annuité de 1^{fr} payable par année, par semestre, par trimestre et par mois, en supposant, pour chacun de ces cas, que l'intérêt est convertible en capital par année, par semestre, par trimestre et par mois.

Si nous supposons que les intervalles successifs qui séparent les différents payements de l'annuité ou de l'intérêt deviennent infiniment petits et en nombre infini, nous obtiendrons les limites extrêmes de la valeur actuelle de l'annuité pour tous les cas possibles.

Ainsi, lorsque k est infini, c'est-à-dire lorsque l'on suppose que les payements de l'annuité doivent être continus, l'expression $k\left[\left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{k}}-1\right]$ devient égale au logarithme hyperbolique de $\left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{\nu}$. Quand ν est infini, c'est-à-dire quand on suppose que les payements de l'intérêt doivent être continus, l'expression $\left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{-\nu n}$ devient égale à ε^{-nt}, et l'expression $\left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{k}}$ égale à $\varepsilon^{\frac{t}{k}}$.

Enfin, si $\nu = k = \infty$, c'est-à-dire si l'on suppose que les payements de l'intérêt et de l'annuité doivent être *tous deux continus*, l'expression $k\left[\left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{k}}-1\right]$ devient égale à t.

Ces explications complètent le tableau suivant.

Pour rendre plus facile l'application de cette théorie, nous nous sommes servi du premier tableau pour en calculer un second, où est présentée la valeur actuelle de l'annuité de 1fr pour 25 ans, à 4 pour 100, en conformité avec les 25 différentes combinaisons du premier tableau.

Ces deux tableaux feront voir en même temps que :

1° La valeur de l'annuité augmente quand le nombre des payements annuels de l'annuité augmente;

2° La valeur actuelle de l'annuité diminue quand le nombre des conversions annuelles de l'intérêt augmente;

3° La valeur actuelle de l'annuité augmente quand le nombre des payements annuels de l'annuité et de l'intérêt augmente, et quand l'intérêt et l'annuité sont payés tous deux en même temps.

Valeur actuelle d'une annuité de 1fr pour n années.

L'intérêt étant payable	L'annuité étant payable : annuellement.	par semestre.	par trimestre.	par mois.	continuellement.
annuellement.	$\frac{1}{i}(1-r^{-n})$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^{-n}}{r^{\frac{1}{2}}-1}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1-r^{-n}}{r^{\frac{1}{4}}-1}$	$\frac{1}{12}\cdot\frac{1-r^{-n}}{r^{\frac{1}{12}}-1}$	$\frac{1-r^{-n}}{\log_e r}$
par semestre.	$\frac{1-\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-2n}}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2}-1}$	$\frac{1-\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-2n}}{i}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-2n}}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}$	$\frac{1}{12}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-2n}}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{\frac{1}{6}}-1}$	$\frac{1-\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-2n}}{2\log_e\left(1+\frac{i}{2}\right)}$
par trimestre.	$\frac{1-\left(1+\frac{i}{4}\right)^{-4n}}{\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4}-1}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{i}{4}\right)^{-4n}}{\left(1+\frac{i}{4}\right)^{2}-1}$	$\frac{1-\left(1+\frac{i}{4}\right)^{-4n}}{i}$	$\frac{1}{12}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{i}{4}\right)^{-4n}}{\left(1+\frac{i}{4}\right)^{\frac{1}{3}}-1}$	$\frac{1-\left(1+\frac{i}{4}\right)^{-4n}}{4\log_e\left(1+\frac{i}{4}\right)}$
par mois.	$\frac{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12n}}{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}-1}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12n}}{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{6}-1}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12n}}{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{3}-1}$	$\frac{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12n}}{i}$	$\frac{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12n}}{12\log_e\left(1+\frac{i}{12}\right)}$
continuellement.	$\frac{1-\varepsilon^{-ni}}{\varepsilon^{i}-1}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\varepsilon^{-ni}}{\varepsilon^{\frac{i}{2}}-1}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\varepsilon^{-ni}}{\varepsilon^{\frac{i}{4}}-1}$	$\frac{1}{12}\cdot\frac{1-\varepsilon^{-ni}}{\varepsilon^{\frac{i}{12}}-1}$	$\frac{1-\varepsilon^{-ni}}{i}$

UNIVERSITY OF MICHIGAN

Valeur actuelle d'une annuité de 1fr pour 25 ans, à 4 pour 100.

		L'ANNUITÉ ÉTANT PAYABLE				
		annuellement.	par semestre.	par trimestre.	par mois.	continuellement
L'INTÉRÊT ÉTANT PAYABLE	annuellement.	fr 15,62208	fr 15,77677	fr 15,85449	fr 15,90645	fr 15,93247
	par semestre	15,55624	15,71180	15,78998	15,84223	15,86840
	par trimestre.	15,52282	15,67883	15,75722	15,80963	15,83588
	par mois.	15,50035	15,65665	15,73520	15,78771	15,81401
	continuellement.	15,48906	15,64551	15,72413	15,77669	15,80301

§ XL.

Le numérateur de la formule (13)

$$V = \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{\nu}\right)^{-\nu n}}{\left(1 + \frac{t}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{k}} - 1}$$

ne varie pas si ν demeure invariable, c'est-à-dire lorsque les termes pour le payement de l'intérêt demeurent les mêmes; par conséquent, lorsque la valeur actuelle de l'annuité est connue dans le cas particulier où les termes pour le payement de l'annuité et celui de l'intérêt coïncident, pour trouver la valeur actuelle de cette annuité payable k fois dans l'année, on multiplie la première valeur par le facteur invariable

$$\frac{\frac{t}{k}}{\left(1 + \frac{t}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{k}} - 1},$$

rapport de l'intérêt simple à l'intérêt composé.

Il est à remarquer que ce facteur ou rapport constant est complétement indépendant du nombre d'années de l'annuité.

Ainsi tous les calculs d'annuités relatifs aux diverses suppositions sont facilement ramenés à la multiplication de la valeur d'une annuité connue par ce facteur. Cependant, comme la recherche de ce facteur requiert souvent quelques calculs pénibles et un peu minutieux, surtout quand l'exposant $\frac{\nu}{h}$ est fractionnaire, ainsi que l'emploi de logarithmes de plus de dix décimales, pour obtenir un résultat avec sept chiffres vrais, j'ai construit une Table 63 où ces fatigants calculs sont convertis en l'addition ou la soustraction d'un simple logarithme.

Cette Table présente les logarithmes de ce facteur pour les cas les plus pratiques et pour cinquante et un taux différents. D'ailleurs les différences entre les fonctions de deux taux consécutifs varient si peu que le taux peut être encore appliqué par interpolation à un taux intermédiaire quelconque.

Désignons par P_2, P_4, P_6 et P_{12} le rapport invariable pour le même taux, par lequel on doit multiplier la valeur actuelle d'une rente annuelle pour obtenir la valeur actuelle d'une rente payable tous les six mois, tous les trois mois, tous les deux mois ou tous les mois. Nous aurons

$$P_2 = \frac{\frac{t}{2}}{r^{\frac{1}{2}} - 1}, \quad P_4 = \frac{\frac{t}{4}}{r^{\frac{1}{4}} - 1}, \quad P_6 = \frac{\frac{t}{6}}{r^{\frac{1}{6}} - 1}, \quad P_{12} = \frac{\frac{t}{12}}{r^{\frac{1}{12}} - 1}.$$

Appelons maintenant Q_2 et Q_4 le rapport invariable par lequel il faut diviser la valeur d'une rente semestrielle ou trimestrielle, où les payements de l'annuité coïncident avec ceux de l'intérêt, pour obtenir la valeur de la *rente annuelle*. L'intérêt étant payable seulement deux ou quatre fois par an, nous avons

$$Q_2 = \frac{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^2 - 1}{t}, \quad Q_4 = \frac{\left(1 + \frac{t}{4}\right)^4 - 1}{t}.$$

Chacun de ces facteurs P et Q sera plus grand que 1.

Par conséquent, toutes les fois qu'il s'agit de calculer la *valeur actuelle* de semblables annuités, déterminons d'abord la valeur de l'annuité dont les payements correspondent avec les payements de l'intérêt.

Ensuite, si l'annuité est payée 2, 4, 6, 12 fois plus souvent que l'intérêt, multiplions la valeur obtenue par le facteur correspondant P.

Si l'annuité est payée 2 ou 4 fois moins souvent que l'intérêt, divisons la valeur obtenue par le facteur correspondant Q.

Au lieu d'avoir à calculer la valeur actuelle de l'annuité, on pourrait avoir à calculer l'annuité elle-même. Dans ce cas, si l'annuité se paye 2, 4, 6 ou 12 fois plus souvent que l'intérêt, on cherche d'abord l'annuité dont les payements coïncident avec ceux de l'intérêt et l'on divise ensuite l'annuité ainsi trouvée par le facteur correspondant P (exemples LXVII, LXIX).

Si, au contraire, l'annuité se paye 2 ou 4 fois moins souvent que l'intérêt, on multiplie l'annuité obtenue par le facteur correspondant Q.

Remarque très-importante. — Les logarithmes P_2, P_4, P_6, P_{12} que l'on doit ainsi ajouter ou retrancher sont ceux qui correspondent, dans la Table IV, à l'intérêt de 1fr d'un payement de l'intérêt à l'autre, c'est-à-dire aux taux annuel, semestriel, trimestriel, etc., suivant que l'intérêt est payable par semestre, par trimestre, etc. Si l'intérêt est payable par semestre, P_2 s'écrit $\dfrac{\frac{t}{4}}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}$, et on le cherche dans la Table IV en face du taux $\frac{t}{2}$. Si l'intérêt est payable par trimestre, P_2 s'écrit $\dfrac{\frac{t}{8}}{\left(1+\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-1}$, et on le cherche dans la Table en face du taux $\frac{t}{4}$.

La même remarque s'applique à P_4, P_6 et P_{12}.

Au contraire, les logarithmes Q_2 et Q_4 que l'on doit ajouter ou retrancher sont ceux qui correspondent, dans la Table IV, à l'intérêt de 1^{fr} d'un payement de l'annuité à l'autre.

Si l'annuité est payable par semestre, Q_2 s'écrit $\frac{\left(1+\frac{t}{4}\right)^2-1}{\frac{t}{2}}$.

Au reste, pour éviter toute chance d'erreur, il vaut toujours mieux commencer par établir la formule (13). C'est même toujours ainsi qu'il faut procéder lorsqu'il s'agit de convertir une rente en une autre (exemples LXVII, LXXI, LXXII et LXXIII).

Ainsi, par exemple, si nous connaissons la valeur de l'annuité de 100^{fr} pour 19 ans, au taux de 4 pour 100, payable annuellement, multiplions-la par P_2, P_4, P_6 ou P_{12}, quand l'annuité est payable tous les 6 mois, tous les 3 mois, tous les 2 mois ou tous les mois.

Si, au contraire, cette rente est annuelle et que l'intérêt soit convertible par semestre, cherchons d'abord la valeur actuelle de l'annuité de 50^{fr}, pour 28 ans, à 2 pour 100, et divisons-la par Q_2.

Si la rente est annuelle et l'intérêt payable tous les 3 mois, cherchons d'abord la valeur actuelle de l'annuité de 25^{fr} pour 76 ans, à 1 pour 100, et divisons-la par Q_4. Dans la Table 63 (pour $t = 4$ pour 100) nous trouvons

$$\log Q_2 = 0,0043214$$
$$Q_4 = 0,0065089.$$

Si l'on cherchait les valeurs de P et de Q pour un taux qui n'est pas compris dans la Table 63, on pourrait les obtenir au moyen d'une simple interpolation.

Par exemple, soit à trouver la valeur de Q pour

$$t = 3\frac{17}{20} \text{ pour } 100.$$

Ce taux, qui est égal à $3\frac{6\frac{4}{5}}{8}$, est compris entre $3\frac{3}{4}$ et $3\frac{7}{8}$.

et

Pour $3\frac{3}{4}$.....	$\log Q_2 = 4,0525$
Pour $3\frac{7}{8}$.....	$\log Q_2 = 4,1870$
Différence.....	1345

par conséquent, pour $3\frac{6\frac{4}{5}}{8}$, nous aurons

$$\log Q_2 = 4,0525 + \tfrac{4}{5} \times 1345 = 4,1601.$$

Si l'on avait à trouver la valeur de P_2 pour $t = 1\frac{37}{40}$ pour 100, ce taux, qui est égal à $1\frac{7\frac{2}{5}}{8}$, étant compris entre $1\frac{7}{8}$ et 2, nous trouvons :

Pour $1\frac{7}{8}$.....	$\log P_2 = 2,0216$
Pour 2.....	$\log P_2 = 2,1554$
Différence.....	1338

par conséquent, $1\frac{7\frac{2}{5}}{8}$ correspond à

$$\log P_2 = 2,0216 + \tfrac{2}{5} \times 1338 = 2,0751.$$

La Table 63 est donc facilement applicable à un taux quelconque; les exemples suivants vont d'ailleurs en faire voir mieux encore l'emploi immédiat.

Exemple LXV. — *Quelle est la valeur actuelle d'une annuité de* 4000^{fr} *pour* 30 *ans, payable tous les* 3 *mois, tandis que l'intérêt est convertible en capital tous les* 6 *mois? Le taux annuel est de* 4 *pour* 100.

La valeur actuelle de l'annuité en question est égale à celle d'une annuité de 2000^{fr} pour 60 ans au taux de 2 pour 100, multipliée par le facteur constant P_2; nous avons, en effet,

$$V = \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-2n}}{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{\alpha}{t}\left[1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-2n}\right] \cdot \frac{\frac{t}{4}}{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}$$

$$= \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{t}{2}}\left[1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-2n}\right] \times P_2,$$

$$V = \frac{\alpha}{2} \cdot \varphi_{(2n)} \cdot P_2.$$

$$\begin{aligned} \log 2000 &= 3,3010300 \\ \log \varphi &= 1,5410907 \\ \log P_2 &= 21554 \\ \hline \log V_2 &= 4,8442761 \end{aligned}$$

$$V_2 = 69867^{fr},65.$$

Exemple LXVI. — *On demande la valeur actuelle d'une annuité de* 1^{fr} *pour* 50 *ans, à* 5 *pour* 100, *payables par semestre, tandis que l'annuité est payable annuellement, par semestre, par trimestre ou par mois.*

L'annuité payable tous les 6 mois est égale à la valeur actuelle de 100 annuités de $\frac{1}{2}$ franc, à $2\frac{1}{2}$ pour 100 par an.

$$V_2 = \frac{1}{t}\left[1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}\right] = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{t}{2}}\left[1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}\right] = \tfrac{1}{2}\cdot\varphi_{(2n)}.$$

$$\begin{aligned} \log \tfrac{1}{2} &= 9,6989700 \\ \log a &= 8,43635 16 \\ \hline \log V_2 &= 1,2626184 \end{aligned}$$

$$V_2 = 18^{fr},30705.$$

Pour obtenir la valeur actuelle de l'annuité payable tous les ans, tous les 3 mois ou tous les mois, il n'y a qu'à diviser ou multiplier ce nombre par les facteurs constants correspondants.

Annuité payable tous les ans.

$$V_1 = \frac{1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^2-1} = \frac{1}{t}\left[1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}\right]\cdot\frac{t}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^2-1} = \frac{V_2}{Q_1}.$$

$$\begin{aligned} \log V_2 &= 1,2626184 \\ -\log Q_2 &= -53950 \\ \hline \log V_1 &= 1,2572234 \end{aligned}$$

$$V_1 = 18,08104.$$

Annuité payable tous les 3 mois.

$$V_4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1} = \frac{1}{t}\left[1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}\right]\cdot\frac{\frac{t}{4}}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1} = V_2 . P_2.$$

$$\begin{aligned} \log V_2 &= 1,2626184 \\ \log P_2 &= 26892 \\ \hline \log V_4 &= 1,2653076 \end{aligned}$$

$$V_4 = 18^{fr},42076.$$

Annuité payable tous les mois.

$$V_{12} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{6}}-1} = \frac{1}{t}\left[1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}\right]\cdot\frac{\frac{t}{12}}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{6}}-1} = V_2 P_6.$$

$$\begin{aligned} \log V_2 &= 1,2626184 \\ \log P_6 &= 44790 \\ \hline \log V_{12} &= 1,2670974 \end{aligned}$$

$$V_{12} = 18^{fr},49684.$$

Exemple LXVII. — *Convertir une annuité de* 3400^{fr} *par an, pendant un nombre illimité d'années, en rentes payables tous les* 6 *mois, tous les* 3 *mois, tous les* 2 *mois ou tous les mois; quel sera le montant annuel de chacune de ces rentes, au taux annuel de* 5 *pour* 100?

$$\frac{3400}{t}\left(1-r^{-n}\right) = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1-r^{-n}}{r^{\frac{1}{2}}-1} = \frac{\alpha'}{4}\cdot\frac{1-r^{-n}}{r^{\frac{1}{4}}-1} = \frac{\alpha''}{6}\cdot\frac{1-r^{-n}}{r^{\frac{1}{6}}-1} = \frac{\alpha'''}{12}\cdot\frac{1-r^{-n}}{r^{\frac{1}{12}}-1},$$

d'où

$$\alpha = 3400\cdot\frac{r^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{t}{2}} = \frac{3400}{P_2};$$

de même

$$\alpha' = \frac{3400}{P_4},\quad \alpha'' = \frac{3400}{P_6},\quad \alpha''' = \frac{3400}{P_{12}}.$$

Tous les 6 *mois.*

$$\log 3400 = 3,53148$$
$$\text{(Tab. 63)}\quad \log P_2 = 533$$
$$\log \alpha = 3,52615$$
$$\alpha = 3358^{fr},50.$$

Tous les 3 *mois.*

$$\log 3400 = 3,53148$$
$$\log P_4 = 799$$
$$\log \alpha' = 3,52349$$
$$\alpha' = 3338^{fr}.$$

Tous les 2 *mois.*

$$\log 3400 = 3,53148$$
$$\text{(Tab. 63)}\quad \log P_6 = 887$$
$$\log \alpha'' = 3,52261$$
$$\alpha'' = 3331^{fr},30.$$

Tous les mois.

$$\log 3400 = 53148$$
$$\log P_{12} = 975$$
$$\log \alpha''' = 3,52173$$
$$\alpha''' = 3324^{fr},50.$$

La somme à payer sera donc

	fr
Par semestre.....	1679,25
Par trimestre.....	834,50
Pour 2 mois.....	555,21
Par mois.....	277,04

au lieu de 3400^{fr} par an.

Exemple LXVIII. — *Quelle est la valeur actuelle de* 23 *annuités de* 5840^{fr}, *payables annuellement, si l'intérêt est conver-*

tible en capital tous les 3 *mois, le taux étant de* 6 *pour* 100?

$$V = 5840 \cdot \frac{1-\left(1+\frac{t}{4}\right)^{-1n}}{\left(1+\frac{t}{4}\right)^{4}-1} = \frac{5840}{t}\left[1-\left(1+\frac{t}{4}\right)^{-4n}\right]\cdot\frac{t}{\left(1+\frac{t}{4}\right)^{4}-1}$$

$$= \frac{\frac{5840}{4}}{\frac{t}{4}}\left[1-\left(1+\frac{t}{4}\right)^{-4n}\right]\cdot\frac{1}{Q_4},$$

$$V = \frac{5840}{4}\cdot\frac{\varphi_{(4n)}}{Q_4}.$$

$$\log\frac{5840}{4} = 3,1643529$$

$$(\text{Tab. } 3)\quad \log\varphi_{(92)} = 1,6965486$$

$$\log Q_4 = \quad 97592$$

$$\log V = 4,8511423$$

$$V = 70981,04.$$

Exemple LXIX. — *Quelle est l'annuité qui peut être rachetée par* 1 360000^{fr} *en* 27 *ans, si l'annuité est payable tous les* 3 *mois et l'intérêt de* $4\frac{1}{4}$ *pour* 100 *convertible par semestre?*

$$1360000 = \frac{\alpha}{4}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1} = \frac{\alpha}{t}\left[1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}\right]\frac{\frac{t}{4}}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}$$

$$= \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{t}{2}}\left[1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}\right]\times P_2,$$

$$1360000 = \frac{\alpha}{2}\cdot\varphi_{(2n)}\cdot P_2;$$

d'où l'on tire

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1360000}{\varphi_{(2n)}\cdot P_2}.$$

$$\log 1360000 = 6,1335389$$

(Tab. 8) $\log \frac{1}{\varphi} = \log a = 8,4956610$

$$\log P_2 = \underline{\quad -22890}$$

$$\log \frac{\alpha}{2} = 4,6269109$$

$$\frac{\alpha}{2} = 42355^{fr},61,$$

$$\alpha = 84711^{fr},22.$$

Exemple LXX. — *Quelle est la valeur actuelle d'une annuité perpétuelle de 7860^{fr}, payable tous les mois en payements égaux, si l'intérêt, au taux de 4 $\frac{3}{4}$ pour 100, peut être converti en capital 2 fois par an seulement?*

$$V = \frac{\alpha}{12\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{6}} - 1} = \frac{\alpha}{t} \cdot \frac{\frac{t}{12}}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{6}} - 1},$$

$$V = \frac{\alpha}{t} \cdot P_6 = \alpha \cdot \varphi_{(\infty)} \cdot P_6.$$

$$\log 7860 = 3,8954225$$
$$\log \varphi_{(\infty)} = 1,3233064$$
$$\log P_6 = \underline{\quad 42572}$$
$$\log V = 5,2229861$$
$$V = 167103,70.$$

Exemple LXXI. — *On demande d'échanger une rente annuelle de 4800^{fr}, payable pendant un nombre illimité d'années, contre une rente payable tous les 3 mois, l'intérêt étant de 3,85 pour 100, payables tous les six mois.*

Comme on ne peut pas trouver dans la Table 63 le taux $3\frac{17}{20}$, on doit chercher par simple interpolation les valeurs de $\log P_2$ et $\log Q_2$. Nous avons

$$V = 4800 \times \frac{\left[1 - \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}\right]}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{2} - 1} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1 - \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2n}}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1},$$

$$4800 \cdot \frac{t}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^2 - 1} = x \cdot \frac{\frac{t}{4}}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \quad \text{ou} \quad \frac{4800}{Q_2} = x . P_1,$$

$$x = \frac{4800}{P_2 Q_2};$$

donc

$$\begin{aligned} \log 4800 &= 3,6812412 \\ -\log P_2 &= \quad -20751 \\ -\log Q_2 &= \quad -41601 \\ \hline \log \alpha &= 3,6750060 \end{aligned}$$

$$\alpha = 4731,579.$$

Il faut donc verser tous les 3 mois $1182^{fr},894$.

Exemple LXXII. — *On voudrait convertir une annuité de* 8450^{fr}, *payable par semestre pendant un nombre quelconque d'années, en une rente payable par trimestre, l'intérêt, payable annuellement, étant de* $3\frac{3}{4}$ *pour* 100. *Quel est le montant de la somme à payer chaque année?*

$$\frac{8450}{2} \cdot \frac{1 - r^{-n}}{r^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{1 - r^{-n}}{r^{\frac{1}{4}} - 1} \quad \text{ou} \quad 8450 \cdot \frac{\frac{t}{2}}{r^{\frac{1}{2}} - 1} = \alpha \cdot \frac{\frac{t}{4}}{r^{\frac{1}{4}} - 1},$$

$$8450 . P_2 = \alpha . P_4;$$

d'où

$$\alpha = \frac{8450 . P_2}{P_4}.$$

$$\begin{aligned} \log 8450 &= 3,9268567 \\ +\log P_2 &= \quad +40154 \\ -\log P_4 &= \quad -60186 \\ \hline \log \alpha &= 3,9248535 \end{aligned}$$

$$\alpha = 8411^{fr},114.$$

Exemple LXXIII. — *On veut convertir* 40 *annuités de* 6170^{fr} *en une rente trimestrielle, payable pendant* 22 *ans, l'intérêt étant de* $3\frac{3}{4}$ *pour* 100, *convertible en capital par semestre. Combien faut-il verser chaque année?*

Soit x la nouvelle annuité; nous aurons alors

$$V = 6170 \times \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-80}}{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{2} - 1},$$

et d'autre part

$$V = \frac{x}{4} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-44}}{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1};$$

donc

$$6170 \times \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-80}}{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{2} - 1} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-44}}{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1},$$

d'où

$$x = 6170 \times \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-80}}{1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-44}} \times \frac{\left[\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] 4}{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{2} - 1} = \frac{6170 . \varphi_{(80)}}{\varphi_{(44)} . P_2 . Q_2}.$$

$$\begin{aligned}
\log 6170 &= 3,79029 \\
\log \varphi_{(80)} &= 1,61560 \\
C' \log \varphi_{(44)} &= 8,52605 \\
-\log Q_2 &= -405 \\
-\log P_2 &= -202 \\
\hline
\log x &= 3,92587
\end{aligned}$$

$$x = 8430^{fr},80,$$

c'est-à-dire qu'au lieu de payer 6170^{fr} par an pendant 40 ans on versera $2107^{fr},70$ par trimestre, pendant 22 ans.

§ XLI. — Calcul de la durée des annuités, lorsque l'intérêt et l'annuité sont payés a différents termes.

La Table 63 rend très-facile le calcul du temps, puisqu'elle présente directement le rapport entre l'annuité don-

née et l'annuité au même taux d'intérêt, mais dont les payements ne correspondent pas aux payements du taux.

Dans ce cas, du logarithme de l'annuité, il faut soustraire le logarithme du rapport constant (§ XL) et déterminer ensuite le temps comme pour les annuités ordinaires.

Exemple LXIV. — *Dans combien d'années un capital de* 72 000^{fr} *sera-t-il amorti par une annuité de* 50 458^{fr},20, *payable par trimestre, tandis que le taux, de* 5 *pour* 100 *par an, n'est payable que par semestre?*

Le taux vrai est de $2\frac{1}{2}$ pour 100 par semestre; la rente semestrielle est par conséquent de 25 229^{fr},10.

$$V = \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-2n}}{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{\alpha}{t} \cdot \frac{t\left[1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-2n}\right]}{4\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1};$$

mais

$$\frac{t}{4\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{\frac{t}{4}}{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} = P_2$$

et

$$\frac{\alpha}{t}\left[1 - \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-2n}\right] = \frac{\alpha}{2} \cdot \varphi_{(2n)} = \frac{\alpha}{2 \cdot a};$$

donc

$$V = \frac{\alpha \times P_2}{2 \cdot a},$$

d'où

$$a = \frac{\alpha \cdot P_2}{2 \cdot V}.$$

$$\begin{aligned} \log \frac{\alpha}{2} = \log 25229^{fr},10 &= 4,4019017 \\ \log P^2 &= 26892 \\ \log V &= 5,8573325 \\ \hline \log a &= 8,5472584 \end{aligned}$$

Il se trouve que ce logarithme correspond, dans la Table 11

($2\frac{1}{2}$ pour 100), avec le chiffre 50 pour les années; la durée de l'annuité est donc exactement de 50 semestres ou 25 ans.

De la formule (13) on peut déduire une formule générale pour calculer le temps. Nous avons, en effet,

$$V = \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{\nu}\right)^{-\nu n}}{\left(1 + \frac{t}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{k}} - 1},$$

d'où

$$1 - \left(1 + \frac{t}{\nu}\right)^{-\nu n} = \frac{Vk}{\alpha}\left[\left(1 + \frac{t}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{k}} - 1\right]$$

ou

$$\left(1 + \frac{t}{\nu}\right)^{-\nu n} = 1 - \frac{Vk}{\alpha}\left[\left(1 + \frac{t}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{k}} - 1\right].$$

Si nous désignons par p_k le facteur constant $\dfrac{\left(1 + \frac{t}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{k}} - 1}{\frac{t}{k}}$,

nous aurons

$$\left(1 + \frac{t}{\nu}\right)^{-\nu n} = 1 - \frac{Vtp_k}{\alpha}$$

et, en employant les logarithmes,

$$n = \frac{-\log\left(1 - \frac{Vtp_k}{\alpha}\right)}{\nu \log\left(1 + \frac{t}{\nu}\right)}.$$

Exemple LXXV. — *Dans combien de temps un capital de* 57 000^{fr} *serait-il amorti par une rente mensuelle de* 260^{fr}, *l'intérêt étant de* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100, *payable annuellement?*

$$\nu = 1, \quad k = 12, \quad \alpha = 3120.$$

$$\begin{aligned}
\log V &= 4,75587 \\
\log t &= 8,65321 \\
\log P_{12} &= -\quad 880 \\
-\log \alpha &= -3,49415 \\
\hline
\log \frac{Vtp}{\alpha} &= 9,90613
\end{aligned}$$

$$\frac{Vtp}{\alpha} = 0,80562,$$

$$1 - \frac{Vtp}{\alpha} = 0,19438,$$

$$\log\left(1 - \frac{Vtp}{\alpha}\right) = 9,28865,$$

$$-\log\left(1 - \frac{Vtp}{\alpha}\right) = 0,71135;$$

$$n = \frac{0,71135}{0,019116} = 37,212.$$

Le temps demandé est donc 37 ans 2 mois 17 jours.

Concluons :

1° Prenez comme taux l'intérêt de 1fr pour chaque partie de l'année pendant laquelle l'intérêt est convertible, et calculez comme si chaque intervalle représentait une année entière. Par exemple, si l'intérêt est convertible par semestre, prenez la moitié de l'annuité et du taux de l'intérêt, et doublez le nombre des années; si l'intérêt est payable par trimestre, prenez le quart de l'annuité et du taux de l'intérêt, et multipliez ensuite par 4 le nombre des années.

2° Si les payements de l'annuité sont plus fréquents que ceux de l'intérêt, multipliez sa valeur par le facteur constant P, la Table 63 étant dressée d'après l'intérêt simple de 1fr pendant chacun des intervalles qui séparent deux payements consécutifs de l'intérêt.

Si, au contraire, les payements de l'annuité sont moins fréquents que ceux de l'intérêt, divisez sa valeur par le facteur constant Q, la Table 63 étant dressée d'après l'intérêt simple de 1fr pendant l'un quelconque des intervalles qui séparent deux payements consécutifs de l'annuité.

XLII. — Équation des annuités.

Annuité moyenne. — Toutes les fois que deux rentes égales, de durées différentes, dont les payements annuels et le taux sont les mêmes, doivent être converties en une seule annuité,

la durée de l'annuité moyenne est toujours exprimée par un nombre d'années *moindre* que la durée moyenne des deux annuités.

Trouvons d'abord x, le nombre d'années exprimant la durée d'une annuité de $2\alpha^{fr}$ équivalente à deux annuités de α^{fr}, dont l'une a une durée exprimée par n années, l'autre une durée exprimée par $(n + 2d)$ années; nous avons

$$\frac{2\alpha}{i}\left(1-\frac{1}{r^x}\right)=\frac{\alpha}{i}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)+\frac{\alpha}{i}\left(1-\frac{1}{r^{n+2d}}\right);$$

par conséquent,

$$\frac{2}{r^x}=\frac{1}{r^n}+\frac{1}{r^{n+2d}} \quad \text{ou} \quad r^x=\frac{2r^{n+d}}{r^d+r^{-d}} \quad (\textit{voir} \text{ p. } 23).$$

Mais c'est la formule que nous avons déjà trouvée (§ XIII) pour l'équation des payements; par conséquent, le temps de l'annuité moyenne est égal au *temps vrai du payement unique* de deux rentes égales payables à la fin des deux annuités.

Ainsi, par exemple, nous avons trouvé (exemple XXV) qu'aux taux de $4\frac{1}{2}$ pour 100 deux capitaux de 500^{fr} chacun, payables, l'un au terme de 7 ans, l'autre au terme de 43 ans, sont équivalents à deux payements de 500^{fr}, acquittés tous deux au terme de $18\frac{1}{2}$ ans à peu près; par conséquent, 2 annuités de 500^{fr} l'une pour 7 ans, l'autre pour 43 ans, sont égales à deux annuités de 500^{fr} pour $18\frac{1}{2}$ ans. Dans le cas présent, au lieu de 50 annuités, il n'y en aurait que 37, le nombre des premières annuités augmentant de $11\frac{1}{2}$, tandis que celui des secondes diminuerait de $24\frac{1}{2}$.

Nous avons déjà démontré que le nombre d'années de l'annuité moyenne est toujours inférieur à la demi-somme des années pendant lesquelles doivent se prolonger les annuités dont il est question, et que ce nombre est d'autant moindre que le taux est lui-même plus élevé.

Ainsi, étant données 2 annuités de 1^{fr}, l'une pour 16 ans, l'autre pour 34 ans, elles donneront, prises ensemble, 50 annuités de 1^{fr} et seront équivalentes également à 2 annuités

de 1^{fr} dont la durée sera :

		ans
A $\frac{1}{4}$ pour 100	.....	24,907
A 1 »	.....	24,599
A 2 »	.....	24,202
A 3 »	.....	23,816
A 4 »	.....	23,444
A 6 »	.....	22,741
A 10 »	.....	21,537

au lieu de 25 ans.

§ XLIII.

Réciproquement, l'annuité correspondant à la durée *moyenne* de 2 annuités est toujours plus grande que l'*annuité moyenne* des deux annuités. Si la première rente contient n annuités et la seconde $(n+2d)$ de 1^{fr}, la différence entre la rente correspondant à la *durée moyenne* des deux annuités et la *rente moyenne* est égale à

$$\frac{2}{t}\left(1-\frac{1}{r^{n+d}}\right)-\frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{r^{n}}\right)-\frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{r^{n+2d}}\right)$$
$$=\frac{1}{tr^{n+2d}}+\frac{1}{tr^{n}}-\frac{2}{tr^{n+d}}=\frac{1}{tr^{n}}\left(\frac{1}{r^{2d}}+1-\frac{2}{r^{d}}\right)$$
$$=\frac{1}{tr^{n}}\left(\frac{1+r^{2d}-2r^{d}}{r^{2d}}\right)=\frac{(r^{d}-1)^{2}}{tr^{n+2d}};$$

donc

$$\Delta=\frac{(r^{d}-1)^{2}}{tr^{n+2d}},$$

quantité qui est toujours positive.

Ainsi, par exemple, 2 annuités de 1^{fr} pour 30 ans valent plus que 2 annuités de 1^{fr}, l'une pour 10 ans, l'autre pour 50 ans, quoiqu'il y ait, dans l'un et l'autre cas, 60 annuités de 1^{fr}.

En effet, à 3 pour 100, nous avons

		fr
Valeur de 10 annuités de 1^{fr}	.....	8,530
» 50 » »	.....	25,730
Total	.....	34,260
Valeur de 30 annuités de 2^{fr}	.....	39,201
Différence	.....	4,941

La formule précédente, qui donne la différence Δ, montre directement que cette différence diminue quand le nombre des années n augmente, ou quand d diminue.

Si le taux varie, la valeur de Δ présente un maximum lorsque $2d = \left(n + \frac{r}{t}\right)(r^d - 1)$. Après ce maximum, la différence diminue, quelle que soit l'augmentation ou la diminution du taux.

Ainsi la différence entre la somme de 2 annuités, l'une pour 50 ans, l'autre pour 10 ans, et 1 annuité de 2^{fr} pour 30 ans, est

A $\frac{1}{4}$	pour	100	0,926
A 4	»		2,948
A 2	»		4,387
A 3	»		4,941
A $3\frac{1}{2}$	»		5,012
A 4	»		4,991
A 5	»		4,767
A 6	»		4,408
A 7	»		3,994
A 8	»		3,572
A 10	»		2,792

Si, au lieu de 2 annuités, il y en avait un plus grand nombre, on trouverait que la moyenne de ces annuités est inférieure à l'annuité de durée moyenne.

§ XLIV.

Une erreur générale dans l'évaluation des annuités viagères consiste à croire que la valeur d'une *annuité viagère*, constituée sur une seule tête, est égale à la valeur d'*une annuité certaine* correspondant à la *vie moyenne* de cette *seule tête*.

Ainsi, en trouvant, suivant la Table de Northampton, que la vie espérée d'un enfant âgé de 7 ans est de $41^{ans},03$ (Inwood, p. 142), on suppose que la valeur de l'*annuité via-*

gère de 1^{fr} payable pendant 41^{ans},03, qui, au taux de 5 pour 100, représenterait un montant de 17^{fr},5495, est la valeur de l'annuité viagère, tandis que ce montant est trop considérable, puisqu'il est seulement de 15^{fr},166; ce qui correspond à une annuité certaine payable pendant 29^{ans},105.

En outre, lorsqu'on détermine, à l'aide de la Table de Northampton, la valeur d'une annuité sur une seule tête âgée de 7 ans, à différents taux d'intérêt, ainsi que le nombre d'années d'une *annuité certaine*, ce dernier est toujours inférieur à la vie moyenne; mais il varie et diminue lorsque le taux augmente.

Nous avons, dans le tableau suivant, présenté la valeur d'une annuité de 1^{fr} constituée sur une seule tête, âgée de 7 ans, à différents taux, suivant la Table de Northampton, ainsi que le nombre d'années d'une *annuité certaine* correspondant à cette rente viagère, la vie moyenne étant de 41^{ans},03 :

TAUX des deux rentes.	VALEUR de l'annuité viagère.	NOMBRE D'ANNÉES de l'annuité déterminée.
		ans
3 %	20,853	33,236
4	17,611	31,078
5	15,166	29,105
6	13,275	27,323
7	11,777	25,710
8	10,570	24,275

Mais qu'est-ce que la *vie moyenne?*

La vie *moyenne*, d'après Price, est l'âge qui résulterait de l'égale répartition, entre un certain nombre de personnes du même âge, de toute la vie future de ces personnes. Ainsi, dans le cas présent, cela veut dire que 1000 individus, tous âgés de 7 ans, peuvent compter avoir encore à vivre, tous ensemble, 41030 ans, qu'ils partageront inégalement entre eux. Ce nombre de 41030 années donne lieu à 41030 an-

nuités de 1^{fr} partagées en divers payements inégaux et diminuant de valeur.

Nos démonstrations du Chapitre précédent concernant les annuités sont applicables d'une manière générale aux annuités viagères. Nous pouvons donc établir simplement, sans aucune démonstration subséquente, que :

1° Le nombre d'années d'une annuité certaine correspondant à une annuité viagère est toujours inférieur à la durée moyenne de la vie sur laquelle elle est constituée;

2° L'annuité certaine d'une durée égale à la vie moyenne est toujours plus grande que l'annuité viagère constituée sur cette même vie.

Ainsi la valeur d'une annuité de 1^{fr}, constituée sur une tête âgée de 7 ans, est, à 3 pour 100, de $20^{fr},853$; la valeur d'une annuité de 1^{fr}, payable pendant $41^{ans},03$ (durée moyenne), est de $23^{fr},419$. La différence égale $2^{fr},566$.

L'erreur à	3	pour 100	est.....	2,566
»	4	»	.....	2,765
»	5	»	.....	2,132
»	6	»	.....	1,866
»	7	»	.....	1,619
»	8	»	.....	1,398

DES RENTES SUR L'ÉTAT.

§ XLV.

Les annuités rachetables (*) établies pour le payement de l'intérêt et le remboursement des emprunts de l'État diffèrent des annuités ordinaires par leur *intérêt*, qui est *invariable*, tandis que le *capital vrai* qu'elles représentent, ou le capital à rembourser, est *variable* et sujet à toutes les fluctuations du marché de la Bourse.

(*) Ces rentes sont dites *rachetables*, parce que l'État conserve le droit de les racheter, en remboursant le propriétaire de l'annuité.

En général, les États sont obligés de racheter ces rentes à un prix plus élevé que celui auquel elles ont été cédées tout d'abord.

Le *capital nominal* de tout titre à une annuité est représenté par la *somme fictive* de 100^{lst} et donne un intérêt annuel de $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$ et 5^{lst} payable par semestre. Lorsque le *prix* du capital est 100^{lst}, on dit qu'il est *au pair;* il est évident que ces rentes ne peuvent pas être toutes au pair en même temps; car il est impossible de supposer qu'une rente annuelle de $2\frac{1}{2}$ pour 100 puisse atteindre le même prix qu'une rente 5 pour 100.

Ces emprunts réunis constituent des capitaux nominaux ou *stocks*, dont *l'ensemble* forme ce que l'on appelle les *fonds de la dette publique,* dont le terme de remboursement n'est pas déterminé, ou plutôt qui ne sont pas remboursables du tout. Les payements semestriels et annuités constituées sur ces stocks sont appelés *dividendes.*

La plus importante de toutes ces rentes, les *consolidés* ou *annuités consolidées,* tire son nom de la consolidation, en l'année 1751, de rentes d'annuités diverses en une rente unique 3 pour 100. Les prix *les plus élevés* qu'ait atteints cette rente ont été 107 (1737), $101\frac{1}{4}$ (1844), $100\frac{5}{8}$ (1845) et $101\frac{3}{4}$^{lst} (1852); les prix les plus bas de la même rente ont été $47\frac{1}{2}$ (1797), $47\frac{1}{4}$ (1798), $50\frac{1}{4}$ (1803), $78\frac{1}{4}$ (1847) et $90\frac{3}{8}$^{lst} (1853).

De l'année 1800 à 1844, les consolidés 3 pour 100 ont toujours été au-dessous du pair (de $50\frac{1}{4}$ à $97\frac{1}{8}$).

Le 3 *pour* 100 *réduit* ou les *annuités réduites* constituent, après les consolidés, la rente la plus considérable; on les appelle ainsi parce que le taux des annuités constituées sur le stock primitif a été réduit, en 1746, du 4 au $3\frac{1}{2}$ pour 100 et, en 1757, au 3 pour 100.

Les *consolidés* 3 *pour* 100 s'élevaient :

A l'époque de leur consolidation, à.....	9137812^{lst}
Au 5 janvier 1844, à.....	367813965
» 1853, à.....	370655463

Le 3 *pour* 100 *réduit* montait :

A l'époque de sa réduction, à.....	177013 23 lst
Au 5 janvier 1844, à.....	125359557
» 1853, à.....	116589420

Le fonds de la dette nationale entière s'élevait :

A la Révolution de 1688, à.....	664263 lst
A l'avénement de Georges Ier (1714), à.....	54145363
Au commencement de la guerre de France (1793), à..	233733609
Au traité de Paris (septembre 1815), à.....	864822438
Au 16 mars 1856, à.....	775312694.

De cette somme, 769000280lst étaient applicables aux rentes 3 pour 100 (consolidés, annuités réduites, annuités de la Banque de 1726, dette à la Banque d'Angleterre et aux stocks de la Mer du Sud), et 6312414lst aux rentes $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 5 pour 100. L'intérêt de cette dette s'élevait, en l'année 1856, à 23267361lst.

Puisque l'État paye le dividende par semestre, nous pouvons calculer toutes les annuités de ces rentes comme des annuités semestrielles.

Exemple LXXVI. — *Si l'État était disposé à transformer la rente* 5 *pour* 100 *en annuités à terme de* 7 *pour* 100 *par an, pendant combien d'années ces annuités devraient-elles être payées, le taux d'intérêt étant de* $5\frac{1}{2}$ *pour* 100 ?

Il est inutile, dans le cas présent, de connaître le cours du 5 pour 100.

Nous avons trouvé (§ XXVI, p. 64) la formule

$$r^n = \frac{\alpha}{s}.$$

Ici,

$$t = 2\tfrac{3}{4} \text{ pour } 100, \quad s = 2, \quad \alpha = 7, \quad \frac{\alpha}{s} = 3,5.$$

$$\begin{aligned} \log 3,5 &= 0,54407 \\ \log\log 3,5 &= 9,73565 \\ \log^2 r &= 8,07121 \\ \hline \log n &= 1,66444 \end{aligned}$$

$$n = 46,179^{\text{sem}} \ (23^{\text{ans}},089).$$

Exemple LXXVII. — *L'État désire échanger une rente* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100 *contre une rente* 3 *pour* 100, *afin d'employer le surplus à l'extinction de ladite rente; dans combien d'années cette rente peut-elle être rachetée au pair?*

Ici

$$\alpha = 3\tfrac{1}{2}, \quad s = \tfrac{1}{2}, \quad \frac{\alpha}{s} = 7, \quad \text{et} \quad t = 1\tfrac{1}{2} \text{ pour } 100;$$

donc

$$\begin{aligned} \log 7 &= 0,84510 \\ \log\log 7 &= 9,92691 \\ \text{Ct}\log^2 r &= 2,18936 \\ \text{Ct}\log 2 &= 9,69897 \\ \hline \log n &= 1,81524 \end{aligned}$$

$$n = 65^{\text{ans}},349.$$

Exemple LXXVIII. — *Combien faut-il verser par an au fonds d'amortissement pour racheter au pair, en* 45 *ans, un emprunt de* 1000000^{lst}, *en rentes* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100?

$$s = \frac{\alpha}{r^n}, \quad \log s = \log\alpha - \log r^n, \quad t = 1\tfrac{3}{4}.$$

$$\alpha = 1000000 \times a.$$

$$\begin{aligned} \log\alpha &= 4,3453267 \\ \text{(Tab. 5)} \quad \log r^n &= 0,6780976 \\ \hline \log s &= 3,6672291 \end{aligned}$$

$$s = 4647^{\text{lst}},604 \text{ par semestre,}$$

ou, pour l'extinction complète de la rente, il faudra payer $9295^{\text{lst}},208$ pour l'amortissement et 35000^{lst} pour l'intérêt annuel; ce qui fait un total de $44295^{\text{lst}},208$ par an.

§ XLVI.

Toutes les fois que la rente n'est pas au pair, il faut calculer le taux semestriel.

Soient

k le dividende annuel correspondant à un capital de 100^{lst};
s le fonds annuel pour l'amortissement de ce capital;
c le cours de cette rente.

L'intérêt semestriel sera

$$t = \frac{k}{2c} \quad \text{et} \quad r = 1 + \frac{k}{2c} = \frac{2c + k}{2c}.$$

Exemple LXXIX. — *Combien faut-il verser annuellement pour rembourser en 4 ans un emprunt de* 45000^{lst}, *consolidés* 3 *pour* 100, *si le cours moyen de ces consolidés est de* 90^{lst}?

Un intérêt de 3^{lst} pour 90^{lst} de capital correspond au taux $3\frac{1}{3}$ pour 100 par an, ou au taux $1\frac{2}{3}$ par semestre. Puisque, pour une rente de 3^{lst}, il faut rembourser 90^{lst}, le montant du capital à verser pour une annuité de 45000^{lst} sera 1350000^{lst}, et, comme on se propose de calculer l'annuité à payer pendant 8 semestres, on aura

$$\begin{aligned} \log V &= 6,1303338 \\ \log a &= \underline{9,1289022} \\ \log \alpha &= 5,2592360 \end{aligned}$$

$$\alpha = 181650^{\text{lst}}.$$

Par conséquent, il faudra verser, à la fin de chaque semestre, une somme moyenne de 181650^{lst}.

En supposant qu'en réalité ces rentes doivent être remboursées sans aucune fraction de livre, il faudra payer un peu plus ou un peu moins, afin de rendre la différence entre l'annuité vraie et l'annuité à payer inférieure à 15^{lst}, somme correspondant à une rente de $\frac{1}{2}^{\text{lst}}$.

Remboursement d'une rente de 45000^{lst} des consolidés 3 pour 100 en 4 ans, au cours moyen de 90^{lst}.

SEMESTRES.	DIVIDENDE payable chaque semestre.	SOMME VERSÉE pour l'amortissement.	PAYEMENT semestriel entier.	RENTES rachetées.	RENTES à racheter.
1	22500^{lst}	159150^{lst}	181650^{lst}	5305^{lst}	39695^{lst}
2	19847 $\frac{1}{2}$	161790	181637 $\frac{1}{2}$	5393	34302
3	17151	164490	181641	5483	28819
4	14409 $\frac{1}{2}$	167250	181659 $\frac{1}{2}$	5575	23244
5	11622	170040	181662	5668	17576
6	8788	172860	181648	5762	11814
7	5907	175740	181647	5858	5956
8	2978	178680	181658	5856	

Exemple LXXX. — *Des annuités de 140000^{lst} de la rente 5 pour 100, au cours moyen de 129^{lst}, doivent être amorties en 24 ans. Quelle somme faut-il payer annuellement?*

Ici

$$t = \frac{5}{129}, \quad V = \frac{140000}{t} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{V}{\varphi};$$

donc

$$\begin{aligned} \log 140000 &= 5,1461280 \\ \text{Ct} \log t &= 1,4116197 \\ \log a &= 8,5077453 \\ \hline \log \alpha &= 5,0654930 \end{aligned}$$

$$\alpha = 116276^{lst},770.$$

§ XLVII.

Si, dans la formule (10), nous remplaçons r par sa valeur $\left(1 + \frac{k}{2c}\right)$, dans laquelle c représente le cours de la rente et k le dividende annuel, correspondant à un capital de 100^{lst}, et si nous changeons n, qui exprime le nombre des semestres, en $2n$, afin d'avoir directement le nombre des années, nous

avons

$$\left(\frac{2c+k}{2c}\right)^{2n}=\frac{\alpha}{s} \quad \text{ou} \quad n=\frac{\log\frac{\alpha}{s}}{2\log\left(\frac{2c+k}{2c}\right)}.$$

Exemple LXXXI. — *Combien faut-il d'années pour rembourser un emprunt contracté pour le service de l'État à* 3 *pour* 100, *si l'on crée pour l'extinction de cet emprunt un fonds d'amortissement égal à* 1 *pour* 100 *du stock, le cours moyen du* 3 *pour* 100 *étant de* 85^{lst} ?

$$s=1,\quad \alpha=4,\quad \frac{\alpha}{s}=4,\quad r=\frac{173}{170},\quad r^{2n}=4,$$

$$2n=\frac{\log(2\times 2)}{\log r}=\frac{\log 2+\log 2}{\log r}=\frac{2\log 2}{\log r},$$

$$n=\frac{2\log 2}{2\log r}=\frac{\log 2}{\log r};$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}\log 2 &= 0,30103\\ \log r &= 0,0075972\\ \log^2 2 &= 9,47861\\ \log^2 r &= 7,88065\\ \hline \log n &= 1,59796\end{aligned}$$

$$n = 39^{\text{ans}},624.$$

En vertu de l'Acte 32 (Geo. III, c. 55, § 3, 1792), il fut prescrit que, pour tous les emprunts futurs, un fonds d'amortissement de 1 pour 100 du stock serait établi pour le rachat graduel du capital.

Le tableau suivant présente dans combien d'années un stock 3 pour 100 peut être racheté par un fonds d'amortissement égal à 1 pour 100 du stock, et à différents prix d'achat :

Cours de la rente 3 pour 100.	Nombre d'années.
75 lst.	35,003
77 ½	36,158
80	37,313
82 ½	38,469

Cours de la rente 3 pour 100.	Nombre d'années.
85	39,624
87 $\frac{1}{2}$	40,779
90	41,935
92 $\frac{1}{2}$	43,090
95	44,245
97 $\frac{1}{2}$	45,400
100	46,556
102 $\frac{1}{2}$	47,711
105	48,866

Comme la différence entre ces nombres est à peu près la même, il est très-facile de déterminer, au moyen de l'interpolation, le temps pour tous les taux intermédiaires; ainsi, par exemple, si le cours du 3 pour 100 est de 98^{fr}, le nombre des années sera

$$45,400 + \frac{1}{5}\,1,156 = 45^{\text{ans}},631.$$

Exemple LXXXII. — *Dans combien d'années un emprunt à 5 pour 100 pourrait-il être amorti par un fonds d'amortissement de 1 pour 100 du stock, le prix moyen de rachat étant de 115^{fr}?*

$$k = 5, \quad s = 1, \quad \alpha = 6, \quad c = 115, \quad r = \frac{47}{46};$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
\log 6 &= 0,77812 \\
\log \tfrac{47}{46} &= 0,00934 \\
\log^2 6 &= 9,89106 \\
\log^2 \tfrac{47}{46} &= 7,97035 \\
\hline
& \ 1,92071 \\
\log 2 &= 0,30103 \\
\hline
\log n &= 1,61968 \\
n &= 41^{\text{ans}},656.
\end{aligned}$$

§ XLVIII.

Le célèbre Dr Price proposa de racheter la dette publique au moyen d'un fonds d'amortissement égal à 1 pour 100 de la somme empruntée.

Exemple LXXXIII. — *Un emprunt de rente* $3\frac{1}{2}$ *a été émis à* 91^{lst}, *avec un fonds d'amortissement égal à* 1 *pour* 100 *de la somme empruntée; combien faudra-t-il de temps pour amortir cet emprunt, le prix moyen de rachat étant de* 102^{lst}?

$$k = 3{,}5, \quad s = 0{,}91, \quad \alpha = 4{,}41, \quad c = 102, \quad r = \frac{415}{408}.$$

$$\begin{aligned}
\log\frac{\alpha}{s} &= 0{,}68540 \\
\log r &= 0{,}0073879 \\
\log^2\frac{\alpha}{s} &= 9{,}83594 \\
\log^2 r &= 7{,}86852 \\
\hline
& \ 1{,}96742 \\
\log 2 &= 0{,}30103 \\
\hline
\log n &= 1{,}66639 \\
n &= 46^{\text{ans}},386.
\end{aligned}$$

Exemple LXXXIV. — *Un emprunt au* 3 *pour* 100 *a été émis à* 87^{lst}, *avec un fonds d'amortissement égal à* 1 *pour* 100 *de la somme empruntée; combien faudra-t-il d'années pour l'amortir au cours de* 90^{lst}?

$$k = 3, \quad s = 0{,}87, \quad c = 90, \quad r = \frac{61}{60}.$$

$$\begin{aligned}
\log\frac{\alpha}{s} &= 0{,}64819 \\
\log r &= 0{,}0071786 \\
\log^2\frac{\alpha}{s} &= 9{,}81170 \\
\text{Ct}\log^2 r &= 2{,}14396 \\
\text{Ct}\log 2 &= 9{,}69897 \\
\hline
\log n &= 1{,}65463 \\
n &= 45^{\text{ans}},147.
\end{aligned}$$

§ XLIX.

En vertu de l'Acte 47 (Geo. III, c. 55, 1807), il fut prescrit de payer annuellement 10 pour 100 sur la *somme empruntée*, pour l'intérêt et le rachat du capital des futurs emprunts.

Exemple LXXXV. — *Un emprunt est effectué, pour le service de l'État, au* 3 *pour* 100 *évalué* 95^{lst}, *et un fonds égal à* 10 *pour* 100 *de la somme empruntée est établi pour l'intérêt et le rachat du capital; dans combien d'années cet emprunt sera-t-il amorti au cours moyen de* $95\frac{1}{2}^{\text{lst}}$?

$$\alpha = 9{,}5, \quad k = 3, \quad s = 6{,}5, \quad c = 95\tfrac{1}{2}, \quad r = \frac{194}{191}.$$

$$\log\frac{\alpha}{s} = 0{,}16481$$
$$\log r = 0{,}0067684$$
$$\log^2\frac{\alpha}{s} = 9{,}21699$$
$$\text{Ct}\log^2 r = 1{,}16952$$
$$\text{Ct}\log 2 = 9{,}69897$$
$$\log n = 1{,}08548$$
$$n = 12^{\text{ans}},175.$$

Exemple LXXXVI. — *Dans combien d'années un emprunt au* 5 *pour* 100, *contracté et émis au prix de* 120^{lst}, *sera-t-il racheté par un fonds de* 10 *pour* 100 *de la somme empruntée?*

$$\alpha = 12, \quad k = 5, \quad s = 7, \quad c = 120, \quad r = \frac{49}{48}.$$

$$\log\frac{\alpha}{s} = 0{,}23408$$
$$\log r = 0{,}0089548$$
$$\log^2\frac{\alpha}{s} = 9{,}36937$$
$$\text{Ct}\log^2 r = 2{,}04794$$
$$\text{Ct}\log 2 = 9{,}69897$$
$$\log n = 1{,}11628$$
$$n = 13^{\text{ans}},07.$$

Exemple LXXXVII. — *On demande de convertir* $84\,000^{\text{lst}}$ *de rente* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100 *en une rente* 3 *pour* 100, *à la condition de laisser pour l'amortissement la différence de l'intérêt et d'y ajouter* $20\,000^{\text{lst}}$ *par an; en outre, on suppose le prix d'achat*

de 96^{lst}; *combien d'années faudra-t-il pour amortir la dette?*

Intérêt réduit $= 72000$, $s = 12000 + 20000 = 32000$,

$$\alpha = 104000, \quad \frac{\alpha}{s} = \frac{13}{4}, \quad r = \frac{65}{64}.$$

$$\log \frac{\alpha}{s} = 0,51188$$
$$\log r = 0,0067334$$
$$\log^2 \frac{\alpha}{s} = 9,70917$$
$$\text{Ct} \log^2 r = 2,17177$$
$$\text{Ct} \log 2 = 9,69879$$
$$\log n = 1,57991$$
$$n = 38^{ans},011.$$

Exemple LXXXVIII. — *Si l'État contracte un emprunt donnant* 112000^{lst} *de rentes* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100 *et établit un fonds d'amortissement de* 88000^{lst} *par an, à quel prix faudra-t-il racheter cet emprunt pour l'amortir en* 25 *ans?*

$$\alpha = 200000, \quad s = 88000, \quad \frac{\alpha}{s} = \frac{25}{11}, \quad k = 3\tfrac{1}{2}, \quad r = 1 + \frac{3\frac{1}{2}}{2c},$$

d'où

$$c = \frac{3\frac{1}{2}}{2(r-1)} = \frac{3\frac{1}{2}}{2t}.$$

$$\log \frac{\alpha}{s} = 0,35654732$$
$$\log r = 0,00713095$$
$$r = 1,01655515$$

$$\log 3\tfrac{1}{2} = 0,54407$$
$$\text{Ct} \log 2 = 9,69897$$
$$\text{Ct} \log t = 0,78107$$
$$\log c = 2,02411$$
$$c = 105^{lst},71$$

Par conséquent, le taux est égal à 1,655515 pour 100 par semestre, c'est-à-dire 3,31103 par an, et le prix cherché est de 105^{lst}, 71.

Exemple LXXXIX. — *On emprunte* 8000000^{lst} *en rentes* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100 *au pair, ce qui donnera* 360000^{lst} *par an. A quel prix moyen peuvent-elles être rachetées en* 21 *ans, en ajoutant* 240000^{lst} *pour l'amortissement, c'est-à-dire en payant annuellement* 600000^{lst}?

$$\frac{\alpha}{s} = \frac{60}{24} = 2,5, \quad r^{4} = 2,5.$$

$$\log 2,5 = 0,39794$$
$$\log r = 0,00947476$$
$$r = 1,0220562$$

Le taux semestriel est donc de 2,20562 ou 4,41124 pour 100 par an, et

$$\log 2,25 = 0,3521825$$
$$\log t = 8,3435307$$
$$\log c = 2,0086518$$
$$c = 102^{lst},012,$$

prix moyen auquel cet emprunt doit être racheté pour être amorti en 21 ans.

Si l'intérêt et l'annuité étaient payables annuellement, nous aurions

$$r^{21} = 2,5, \quad \log r = 0,0189495, \quad r = 1,0445988;$$

le taux annuel serait égal à 4,45988 pour 100, et le prix de 100^{lst},900.

§ L. — Obligations ou bons remboursables au moyen du tirage au sort.

La méthode consistant à racheter des emprunts par des payements annuels joue un rôle très-important dans nos grandes transactions industrielles, où les fortunes particulières sont employées à former ces fonds considérables, nécessaires aux grandes Compagnies.

Ainsi, dans la plupart des États du continent (*) et en

(*) En France seulement, les obligations émises s'élèvent à plus de 150000000^{lst}.

Amérique, les villes et les Compagnies des canaux, des mines et des chemins de fer, dont les concessions sont limitées, contractent de lourds emprunts remboursables par annuités constantes.

Afin de pouvoir réunir les moindres épargnes des particuliers, les Compagnies ont émis des *bons* spéciaux appelés *obligations*, dont chacune représente une très-faible fraction de l'emprunt contracté, 20 ou 50^{lst} dans le plus grand nombre des cas. Ces obligations, dont la plupart sont émises au-dessous du pair (les obligations de 20^{lst} à 11^{lst} en moyenne), les Compagnies sont obligées de les rembourser par un certain nombre d'annuités, l'année de l'expiration de la concession de la Compagnie étant le terme au delà duquel ne peut être fixé le dernier remboursement.

Comme les fonds publics, les obligations produisent un intérêt semestriel et sont transférables à la Bourse.

Le remboursement par annuités constantes diffère essentiellement du remboursement par obligations, où le *fonds d'amortissement* joue un rôle tout à fait différent.

Les Compagnies versent chaque année une somme constante ou à peu près constante, composée de deux payements semestriels, *inégaux* et *variables*. Le taux d'intérêt est toujours *semestriel*, et l'intérêt se paye par semestre.

Le rachat graduel de presque tous les emprunts contractés par obligations n'a lieu qu'une fois par an. L'*amortissement*, c'est-à-dire le surplus de l'annuité constante sur l'intérêt total pour l'année, n'est pas réparti entre toutes les obligations, mais sert seulement à éteindre un certain nombre d'obligations désignées par le sort.

Il suit de là que l'annuité constante comprend deux payements semestriels, dont le premier ne comprend que l'intérêt pour le premier semestre, tandis que le second renferme, outre l'intérêt du second semestre, le surplus de l'annuité au moyen duquel la somme empruntée est graduellement éteinte. De cette manière, le capital diminuant d'année en année, il est évident que les premiers payements semestriels vont toujours

en diminuant, et que le nombre d'obligations à rembourser à la fin de l'année va en augmentant.

Il reste maintenant à résoudre deux questions :

1° *Quelle est la somme payable chaque année?*

2° *Quelle est la valeur actuelle d'une obligation, à un taux différent de son taux nominal?*

Nous avons d'abord à déterminer la somme annuelle à payer pour un emprunt de V^{fr} pendant n années.

Soient t le taux annuel, payable par semestre, x l'annuité, c'est-à-dire la somme des deux payements semestriels de la même année, capable d'amortir 1^{fr} dans n années.

Le capital restant est :

A la fin de la	première année.....	$r - x$,
»	deuxième »	$r^2 - \frac{x}{t}(r^2 - 1)$,
»	troisième »	$r^3 - \frac{x}{t}(r^3 - 1)$,
»	quatrième »	$r^4 - \frac{x}{t}(r^4 - 1)$.

Enfin, au bout de la $n^{ième}$ année, le capital restant sera

$$r^n - \frac{x}{t}(r^n - 1);$$

et, comme à cette époque l'emprunt doit être entièrement éteint, nous aurons

$$r^n - \frac{x}{t}(r^n - 1) = 0 \quad \text{ou} \quad r^n = \frac{x}{t}(r^n - 1),$$

d'où l'on tire

$$1 = \frac{x}{t}\left(\frac{r^n - 1}{r^n}\right) = \frac{x}{t}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right) \quad \text{ou} \quad x = \frac{t}{1 - \frac{1}{r^n}} = \frac{t}{1 - r^{-n}};$$

telle est l'annuité à payer pour un capital de 1^{fr}; et, par conséquent, la somme annuelle à payer pour un capital de V^{fr} est

$$\alpha = \frac{Vt}{1 - r^{-n}}.$$

Mais c'est exactement la même annuité payable pour V^{fr}, lorsque le taux d'intérêt et tous les payements sont annuels; par conséquent, l'annuité payable pendant n années pour amortir 1^{fr} au taux annuel t est égale à l'annuité payée au taux semestriel $\frac{t}{2}$, lorsque l'intérêt est payable par semestre et l'amortissement payable une fois par an seulement.

Par exemple, pour un capital de 100000^{fr} remboursable en 16 ans, on paye chaque année :

1° 8582^{fr} au taux annuel de 4 pour 100, l'annuité étant payable à la fin de chaque année;

2° $8522^{fr},122$ payables par semestre ou $4261^{fr},061$ chaque semestre, au taux de 2 pour 100 par semestre;

3° 8582^{fr} au taux de 2 pour 100 par semestre, quand l'intérêt est payable par semestre et l'amortissement payable annuellement.

Exemple XC. — *Combien faut-il payer pour un emprunt de* $600\,000^{fr}$ *pour* 6 *ans, au taux de* $1\frac{1}{2}$ *pour* 100 *par semestre, si l'intérêt est payable par semestre et l'amortissement payable une fois par an seulement?*

$$\log 600000 = 5,7781513$$
$$\log a = 9,2662258$$
$$\log \alpha = 5,0443771$$
$$\alpha = 110758,50.$$

Le tableau suivant montre l'exactitude du résultat :

ANNÉE.	CAPITAL au commencement de l'année.	PREMIER PAYEMENT de l'année.	SECOND PAYEMENT.	
			Amortissement.	Total.
1	600000	9000	92758,5	101758,50
2	507241,5	7608,6	95541,3	103149,90
3	411700,2	6175,5	98407,5	104583
4	313292,7	4699,4	101359,7	106059,10
5	211933	3179	104400,5	107579,50
6	107532,5	1630	107532,5	109145,50

Voici la seconde question :

Une somme donnée étant convertie en une annuité constante avec un intérêt semestriel et un amortissement annuel, on demande la valeur actuelle de cette annuité à un taux quelconque payable par semestre.

Soient

V le capital converti en annuités;

$\frac{t}{2}$ l'intérêt semestriel de 1^{fr};

α l'annuité;

$s = \alpha - Vt = \frac{\alpha}{r^n}$ l'amortissement, ou le surplus de l'annuité sur l'intérêt annuel;

C la valeur actuelle de cette annuité au taux semestriel τ.

Les payements successifs sont :

Première année, premier payement...			$\frac{1}{2}(\alpha - s)$
Deuxième	»	» ..	$\frac{1}{2}(\alpha - rs)$
Troisième	»	» ..	$\frac{1}{2}(\alpha - r^2 s)$
$n^{ième}$	»	» ..	$\frac{1}{2}(\alpha - r^{n-1} s)$
Première année, deuxième payement..			$\frac{1}{2}(\alpha + s)$
Deuxième	»	» ..	$\frac{1}{2}(\alpha + rs)$
Troisième	»	» ..	$\frac{1}{2}(\alpha + r^2 s)$
$n^{ième}$	»	» ..	$\frac{1}{2}(\alpha + r^{n-1} s)$

La valeur actuelle de l'annuité est égale à la somme des valeurs actuelles de ces divers payements.

Or les valeurs actuelles de chacun des premiers payements de chaque année sont

$$\frac{1}{2}(\alpha - s)\rho^{-1}, \quad \frac{1}{2}(\alpha - rs)\rho^{-3},$$

$$\frac{1}{2}(\alpha - r^2 s)\rho^{-5}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2}(\alpha - r^{n-1} s)\rho^{-2n+1}.$$

De même les valeurs actuelles de chacun des seconds payements sont

$$\frac{1}{2}(\alpha + s)\rho^{-2}, \quad \frac{1}{2}(\alpha + rs)\rho^{-4},$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + r^2 s)\rho^{-6}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2}(\alpha + r^{n-1} s)\rho^{-2n}.$$

En faisant la somme de ces diverses valeurs actuelles, on obtient

$$C = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} + \ldots + \frac{1}{\rho^{2n}}\right)$$
$$- \frac{s}{2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{r}{\rho^3} + \frac{r^2}{\rho^5} + \ldots + \frac{r^{n-1}}{\rho^{2n-1}}\right) + \frac{s}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{r}{\rho^4} + \ldots + \frac{r^{n-1}}{\rho^{2n}}\right).$$

Le premier terme du second membre est égal à

$$\frac{\alpha}{2\tau}\left(1 - \frac{1}{\rho^{2n}}\right).$$

Nous allons simplifier les deux autres. Soit y leur somme; on obtient

$$y = -\frac{s\rho}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{r}{\rho^4} + \frac{r^2}{\rho^6} + \ldots + \frac{r^{n-1}}{\rho^{2n}}\right) + \frac{s}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{r}{\rho^4} + \frac{r^2}{\rho^6} + \ldots + \frac{r^{n-1}}{\rho^{2n}}\right)$$
$$= -\frac{s}{2}(\rho - 1)\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{r}{\rho^4} + \ldots + \frac{r^{n-1}}{\rho^{2n}}\right) = -\frac{s\tau}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{r}{\rho^4} + \ldots + \frac{r^{n-1}}{\rho^{2n}}\right).$$

Appelons

$$x = \frac{1}{\rho^2} + \frac{r}{\rho^4} + \ldots + \frac{r^{n-1}}{\rho^{2n}}.$$

En multipliant par ρ^2 et en divisant par r, on obtient

$$\frac{x\rho^2}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{r}{\rho^4} + \ldots + \frac{r^{n-2}}{\rho^{2n-2}},$$

et, en retranchant la première équation de la seconde,

$$\frac{x\rho^2}{r} - x \quad \text{ou} \quad x\left(\frac{\rho^2 - r}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{r^{n-1}}{\rho^{2n}} = \frac{\rho^{2n} - r^n}{r.\rho^{2n}},$$

d'où

$$x = \frac{\rho^{2n} - r^n}{\rho^{2n}(\rho^2 - r)} = \frac{1 - r^n\rho^{-2n}}{\rho^2 - r};$$

par conséquent,

$$C = \frac{\alpha}{2\tau}(1 - \rho^{-2n}) - \frac{s\tau}{2}.\frac{1 - r^n\rho^{-2n}}{\rho^2 - r};$$

ou, en remplaçant s par sa valeur $\frac{\alpha}{r^n}$,

$$(15) \qquad C = \frac{\alpha}{2\tau}(1 - \rho^{-2n}) - \frac{\alpha\tau}{2} \cdot \frac{r^{-n} - \rho^{-2n}}{\rho^2 - r};$$

telle est la valeur cherchée de l'annuité.

Le premier terme fractionnaire de cette équation représente la valeur actuelle de l'annuité au taux donné, l'annuité étant supposée payable par semestre.

$(\rho^2 - r)$ exprime la différence entre le montant de 1fr dans 1 an au taux semestriel τ et le montant de 1fr à la fin d'une année au taux annuel t. (Nous présentons dans le tableau suivant les logarithmes de $(\rho^2 - r)$ pour $t = 3$ pour 100 et pour toutes les valeurs de ρ, depuis 1 $\frac{1}{2}$ pour 100 jusqu'au 4 pour 100 :

TAUX semestriel τ.	$\log(\rho^2 - r)$.	TAUX semestriel τ.	$\log(\rho^2 - r)$.	TAUX semestriel τ.	$\log(\rho^2 - r)$.
1 1/2	6,3521825	2 3/8	8,2568154	3 1/4	8,5569805
1 5/8	7,4415479	2 1/2	8,3143940	3 3/8	8,5870266
1 3/4	7,7247877	2 5/8	8,3652645	3 1/2	8,6151607
1 7/8	7,8949561	2 3/4	8,4108826	3 5/8	8,6416135
2	8,0170333	2 7/8	8,4521939	3 3/4	8,6665765
2 1/8	8,1123211	3	8,4899585	3 7/8	8,6902099
2 1/4	8,1905068	3 1/8	8,5247409	4	8,7126497

$(r^{-n} - \rho^{-2n})$ représente la différence entre la valeur actuelle de 1fr payable dans n années au taux annuel t et la valeur actuelle de 1fr payable dans n années au taux semestriel τ.

La différence $r^{-n} - \rho^{-2n}$ varie avec le nombre des années. D'abord nulle quand $n = 0$, elle augmente jusqu'à ce qu'elle s'élève au maximum donné par l'équation

$$n = \frac{\log\left(\frac{\log\rho^2}{\log r}\right)}{\log\left(\frac{\rho^2}{r}\right)} = \frac{\log\left(\frac{2\log\rho}{\log r}\right)}{2\log\rho - \log r};$$

enfin

$$n = \frac{\log 2 + \log^2 \rho - \log^2 r}{2 \log \rho - \log r}.$$

Elle diminue ensuite continuellement jusqu'à $n = \infty$, où elle redevient nulle. Pour $t = 3$ pour 100 et $2\tau = 5\frac{1}{2}$,

$$n = \frac{0,2637717}{0,01072644} = 24^{\text{ans}},590.$$

En représentant par K la valeur actuelle de tous les amortissements, c'est-à-dire des payements qui constituent V, on peut remplacer la formule (15) par la suivante :

$$C = \frac{\alpha}{2} \cdot \varphi_{(\tau)} - \frac{K\tau}{2}.$$

En effet

$$\frac{1}{\tau}(1 - \rho^{-2n}) = \varphi_{(\tau)}.$$

Les divers payements pour l'amortissement du capital sont

$$\frac{\alpha}{r^n}, \quad \frac{\alpha}{r^{n-1}}, \quad \frac{\alpha}{r^{n-2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha}{r}.$$

La somme de leurs valeurs actuelles au taux semestriel ρ sera par conséquent

$$\alpha\left(\frac{1}{r^n\rho^2} + \frac{1}{r^{n-1}\rho^4} + \ldots + \frac{1}{r\rho^{2n}}\right).$$

Soit

$$y = \frac{1}{r^n\rho^2} + \frac{1}{r^{n-1}\rho^4} + \ldots + \frac{1}{r\rho^{2n}}.$$

En multipliant par r et en divisant par ρ^2, on obtient

$$\frac{yr}{\rho^2} = \frac{1}{r^{n-1}\rho^4} + \frac{1}{r^{n-2}\rho^6} + \ldots + \frac{1}{\rho^{2n+2}},$$

et, en retranchant la seconde équation de la première,

$$y - \frac{yr}{\rho^2} \quad \text{ou} \quad y\left(\frac{\rho^2 - r}{\rho^2}\right) = \frac{1}{r^n\rho^2} - \frac{1}{\rho^{2n+2}},$$

$$y(\rho^2 - r) = \frac{1}{r^n} - \frac{1}{\rho^{2n}} = r^{-n} - \rho^{-2n},$$

$$y = \frac{r^{-n} - \rho^{-2n}}{\rho^2 - r} \quad \text{et} \quad K = \alpha \cdot \frac{r^{-n} - \rho^{-2n}}{\rho^2 - r};$$

par conséquent,

$$C = \frac{\alpha}{2} \cdot \varphi_{(\tau)} - \frac{K\tau}{2}.$$

On peut encore exprimer C au moyen de cette autre formule

$$C = \frac{I}{2\tau} + \frac{K}{2\tau}(2\tau - t) = \frac{I}{2\tau} + K\left(\frac{\tau - \frac{t}{2}}{\tau}\right).$$

En effet, on sait que

$$I = Vt = \alpha(1 - r^{-n}) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{I}{1 - r^{-n}};$$

par conséquent,

$$C = \frac{I}{2\tau} \cdot \frac{1 - \rho^{-2n}}{1 - r^{-n}} - \frac{K\tau}{2} = \frac{I}{2\tau}\left(\frac{1 - r^{-n} + r^{-n} - \rho^{-2n}}{1 - r^{-n}}\right) - \frac{K\tau}{2}$$

$$= \frac{I}{2\tau}\left(1 + \frac{r^{-n} - \rho^{-2n}}{1 - r^{-n}}\right) - \frac{K\tau}{2},$$

$$C = \frac{I}{2\tau} + \frac{I}{2\tau} \cdot \frac{r^{-n} - \rho^{-2n}}{1 - r^{-n}} - \frac{K\tau}{2}.$$

Mais

$$1 - r^{-n} = \frac{I}{\alpha} \quad \text{et} \quad r^{-n} - \rho^{-2n} = \frac{K(\rho^2 - r)}{\alpha};$$

par conséquent,

$$C = \frac{I}{2\tau} + \frac{K}{2\tau}(\rho^2 - r) - \frac{K\tau^2}{2\tau} = \frac{I}{2\tau} + K(\rho^2 - r - \tau^2)$$

$$= \frac{I}{2\tau} + \frac{K}{2\tau}(2\tau - t) = \frac{I}{2\tau} + K\left(\frac{\tau - \frac{t}{2}}{\tau}\right).$$

Cette formule est préférable lorsque 2τ et t sont très-rapprochés.

On peut déduire de ces diverses formules deux limites pour le taux des obligations : une limite *inférieure* $\frac{I}{C}$ et une limite *supérieure* $\frac{\alpha}{C}$, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{I}{C} < 2\tau < \frac{\alpha}{C}.$$

En effet :

1. *Limite inférieure.* — De la formule

$$C = \frac{I}{2\tau} + \frac{K}{2\tau}(2\tau - t)$$

on tire

$$2\tau = \frac{I}{C} + \frac{K}{C}(2\tau - t), \quad 2\tau > \frac{I}{C}.$$

2. *Limite supérieure.* — La formule

$$C = \frac{\alpha}{2\tau}(1 - \rho^{-2n}) - \frac{K\tau}{2} = \frac{\alpha}{2\tau} - \frac{\alpha}{2\tau\rho^{2n}} - \frac{K\tau^2}{2\tau}$$

donne

$$2\tau = \frac{\alpha}{C} - \frac{1}{C}\left(\frac{\alpha}{\rho^{2n}} + K\tau^2\right); \quad 2\tau < \frac{\alpha}{C}.$$

Exemple XCI. — 600000^{fr} *de capital sont placés au taux semestriel de* $1\frac{1}{2}$ *pour* 100 *et remboursables en* 6 *annuités; l'intérêt est payable par semestre et l'amortissement payable annuellement; combien ces* 6 *annuités devraient-elles être achetées pour que l'acheteur retirât* $2\frac{1}{2}$ *pour* 100 *par semestre?*

$$C = \frac{\alpha}{2\tau}(1 - \rho^{-2n}) - \frac{\alpha\tau}{2} \cdot \frac{r^{-n} - \rho^{-2n}}{\rho^2 - r}.$$

Cherchons d'abord la valeur du premier terme

$$\alpha = \frac{600000}{\varphi_{(6)}} = 600000 . a,$$

et puisque

$$\frac{1}{\tau}(1 - \rho^{-2n}) = \varphi' = \frac{1}{a'},$$

nous aurons

$$\frac{600000 . a}{2a'}.$$

Valeur du premier terme.

	log 600000 = 5,7781513
(Tab. 15)	log a = 9,2662258
	Ct log 2 = 9,6989700
(Tab. 11)	Ct log a' = 1,0110527
	log = 5,7543998

560067^{fr},20.

Valeur du deuxième terme.

$$\log r^{-6} = 9,8713136$$
$$r^{-6} = 0,8374844$$
$$\log \rho^{-12} = 9,9229767$$
$$\rho^{-12} = 0,7435559$$
$$r^{-6} - \rho^{-12} = 0,0939285$$
$$\log(r^{-6} - \rho^{-12}) = 8,97280$$
$$\log \frac{\alpha}{2} = 4,74335$$
$$\log \tau = 8,39794$$
$$\text{Ct} \log(\rho^2 - r) = 1,68561$$
$$\log \quad = 3,79970$$
$$6305,10$$

	fr
	568067,20
	—6305,10
Valeur de C...	561762,10

Ainsi la valeur actuelle, au taux semestriel de $2\frac{1}{2}$ pour 100, des payements nécessaires pour acquitter 600000^{fr} en 6 ans, au taux semestriel de $1\frac{1}{2}$ pour 100, est de 561762^{fr},10.

Réciproquement, en échangeant 561762^{fr},10 contre ces 12 payements, l'acheteur retire de son argent un intérêt semestriel de $2\frac{1}{2}$ pour 100.

Le tableau suivant démontre l'exactitude de ce résultat :

SEMESTRES.	CAPITAL au commencement de chaque semestre.	INTÉRÊT semestriel.	SOMME DUE à la fin de chaque semestre.	SOMME PAYÉE. (*voir* p. 131.)	SOMME DUE à la fin de chaque semestre.
1	561762,10	14044,10	575806,20	9000	566806,20
2	566806,20	14170,20	580976,40	101758,50	479217,90
3	479217,90	11980,40	491198,30	7608,60	483589,70
4	483589,70	12089,70	495679,40	103149,90	392529,50
5	392529,50	9813,30	402342,80	6175,50	396167,30
6	396167,30	9904,20	406071,50	104583	301488,50
7	301488,50	7537,20	309025,70	4699,40	304326,30
8	304326,30	7608,20	311934,50	106059,10	205875,40
9	205875,40	5146,90	211022,30	3179	207843,30
10	207843,30	5196,10	213039,40	107579,50	105459,90
11	105459,90	2636,50	108096,40	1613	106483,40
12	106483,40	2662,10	109145,50	109145,50	

La valeur actuelle des obligations se calcule ordinairement en admettant que les taux d'intérêts comme aussi tous les payements sont ou annuels ou semestriels. Le résultat que l'on obtient ainsi est toujours erroné.

Ainsi, dans l'exemple précédent, nous trouvons comme valeur de l'annuité $562176^{fr},10$ lorsqu'on suppose tous les payements annuels, et $564258^{fr},90$ lorsqu'on les suppose tous semestriels.

Il est très-utile de connaître laquelle de ces deux valeurs est la plus approchée. Comme la valeur vraie de l'annuité est toujours inférieure à l'une quelconque de ces deux valeurs approchées, la question est de savoir laquelle est la plus petite.

La valeur actuelle au taux τ du capital V placé à t pour 100 et remboursable au moyen des payements *annuels* est

$$V.\frac{\varphi(\tau)}{\varphi(t)}.$$

De même, la valeur actuelle du même capital, lorsque les taux et tous les payements sont *semestriels*, est

$$V.\frac{\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Mais nous avons déjà démontré (p. 96) que, pour une certaine valeur de n, il existe toujours la proportion suivante entre les deux taux t et τ (le dernier étant le plus grand) :

$$\frac{\varphi\left(\frac{t}{2}\right)}{\varphi(t)}=\frac{\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\varphi(\tau)};$$

que, pour un nombre d'années moindre, le premier terme est toujours *moindre* que le second, et que, pour un *plus grand nombre* d'années, il est toujours *plus grand*.

Par conséquent, la dernière équation étant multipliée par $V.\frac{\varphi(\tau)}{\varphi\left(\frac{t}{2}\right)}$, nous obtenons, pour la même valeur de n, l'égalité

suivante :

$$V.\frac{\varphi(\tau)}{\varphi(t)} = V.\frac{\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Ainsi, pour ce nombre n d'années, trouvé par l'équation de la page 96, la valeur par années entières est égale à la valeur par semestres; de même, pour un nombre d'années *moindre*, la valeur par années entières est *moindre* que la valeur par semestres, et, pour un nombre d'années plus considérable, elle est toujours plus *grande* que la valeur par semestres.

Par exemple, si nous cherchons la valeur actuelle, au taux semestriel de $5\frac{1}{2}$ pour 100, de l'annuité payée pour un capital de 100000^{fr}, placé à 3 pour 100, payables par semestre, au moyen du tableau donné (p. 97), on voit que, pour ces deux taux d'intérêt, les rapports entre les payements annuels et semestriels sont égaux pour un nombre d'années égal, à peu près, à 39; il importe donc peu, pour ce nombre d'années, de calculer par années ou par semestres.

Mais, pour un nombre d'années inférieur à 39, les payements annuels sont moindres et plus approchés que les payements semestriels; il en est de même, à leur tour, des payements semestriels pour un nombre d'années supérieur à 39.

Afin d'apprécier le degré d'approximation entre la valeur vraie d'une annuité et les deux valeurs approchées que l'on obtient en supposant tous les payements annuels ou semestriels, j'ai présenté le tableau suivant où sont données, pour différentes années, les trois valeurs, au taux de $5\frac{1}{2}$ pour 100, payables par semestres, d'un capital nominal de 100000^{fr} placé au taux de 3 pour 100, payables par semestres.

ANNÉES.	VALEUR		
	vraie.	par année.	par semestre.
1	97599,50	97630,30	98187,20
3	95322,10	95380,10	95878,30
10	88235,80	88364	88692,30
15	83922,10	84081,40	84316,40
20	80146,90	80325,40	80486,10
30	73958,70	74150,10	74206,40
35	71437,30	71626,50	71647,50
38	70080,80	70266,80	70270,70
39	69652,60	69837,40	69836,30
40	69236	69419,30	69413,40
50	65640,60	65805,20	65765,10
60	62909,80	63051,50	62995,10
80	59257,50	59372,50	59312,20
99	57283,60	57346,80	57297,10
∞	54545,40	54545,40	54545,40

Exemple XCIII. — *Une Compagnie émet* 14271 *obligations de* 500^{fr} *rapportant* 5 *pour* 100 *d'intérêt, et remboursables au moyen de* 15 *annuités. Quelle somme la Compagnie doit-elle verser chaque année, et quel est le nombre d'obligations remboursables chaque année?* (Chemin de fer de Cordoue à Séville.)

$$\log 14271 = 4,1544544$$
$$\log 500 = 2,6989700$$
$$\log a = 8,9838170$$
$$\log \alpha = 5,8372414$$

$\alpha = 687450^{fr}$ (annuité à payer).

Pour régler les comptes relatifs au payement de l'intérêt et au remboursement successif de l'emprunt, nous avons :

Annuité moyenne.....	687450^{fr}
Intérêt de 14271 obligations.....	356775
Pour l'amortissement.....	330675

Cette somme correspond à 661,350 obligations de 500^{fr}, et, comme le nombre des obligations à rembourser doit être

un nombre entier, 661 seulement seront remboursées; ce qui réduit à 13610 le nombre des obligations dues.

La Compagnie aura donc à payer, à la fin de la première année :

	fr
Pour l'intérêt du premier semestre...	178387,50
» du deuxième » ...	178387,50
Pour le rachat de 661 obligations.....	330500
Total.....	687275

A la fin de la seconde année :

	fr
Annuité moyenne.....	687450
Intérêt de 13610 obligations.....	340250
Somme laissée pour l'amortissement...	347200

Cette somme correspond à 694,4 obligations; il faudra donc rembourser 694 obligations, ce qui abaisse leur nombre à 12916, et la Compagnie devra verser pour la seconde année :

	fr
Pour l'intérêt de 13610 obligations.....	340250
Pour le rachat de 694 obligations.....	347000
Total.....	687250

A la fin de la troisième année :

	fr
Annuité moyenne.....	687450
Intérêt de 12916 obligations.....	322900
Somme laissée pour l'amortissement...	364550

Cette somme correspond à 729,10 obligations; la Compagnie aura donc à racheter 729 obligations, ce qui réduit leur nombre à 12187; la somme à payer à la fin de la troisième année sera :

	fr
Pour l'intérêt de 12916 obligations.....	322900
Pour le rachat de 729 obligations.....	364500
Total.....	687400

A la fin de la quatrième année :

	fr
Annuité moyenne.....	687450
Intérêt de 12187 obligations.....	304675
Somme laissée pour l'amortissement...	382775

Cette somme correspond à 765,55 obligations; la Compagnie aura donc à rembourser 766 obligations, et à payer :

	fr
Pour l'intérêt de 12187 obligations.....	304675
Pour le rachat de 766.....	383000
Total.....	687675

et ainsi de suite. L'ensemble du calcul est présenté dans le tableau suivant :

ANNÉES.	NOMBRE D'OBLIGATIONS		ANNUITÉS.		
	dues.	remboursées à la fin de l'année.	Intérêt.	Amortissement.	Total.
1	14271 oblig.	661	356775 fr	330500	687275
2	13610	694	340250	347000	687250
3	12916	729	322900	364500	687400
4	12187	766	304675	383000	687675
5	11421	804	285525	402000	687525
6	10617	844	265425	422000	687425
7	9773	886	244325	443000	687325
8	8887	931	222175	465500	687675
9	7956	977	198900	488500	687400
10	6979	1026	174475	513000	687475
11	5953	1077	148825	538500	687325
12	4876	1131	121900	565500	687400
13	3745	1188	93625	594000	687625
14	2557	1247	63925	623500	687425
15	1310	1310	32750	655000	687750

On peut remarquer, d'après le précédent tableau, que l'annuité sera toujours un peu plus grande ou un peu plus petite que l'annuité moyenne.

Dans le § XXII, nous avons mentionné ce fait remarquable que les sommes payées pour l'amortissement forment une *progression géométrique;* on peut l'appliquer également à l'amortissement des obligations; par conséquent, dans l'exemple précédent, le nombre d'obligations rembour-

sables chaque année est à *peu de chose près* (*) un des termes d'une progression géométrique semblable à la progression d'un capital de 1^{fr} placé au même taux d'intérêt.

Exemple XCIII. — *Une Compagnie émet* 100000 *obligations de* 500^{fr} *produisant un intérêt de* 15^{fr} *par an, payable par semestre, et remboursables en* 90 *ans. Combien cette Compagnie doit-elle verser à la fin de chaque année pour l'intérêt et l'amortissement, et quel est le nombre d'obligations remboursables à la fin de la première et de la quarante-quatrième année?* (Chemins de fer autrichiens.)

$$\alpha = \frac{V}{\varphi_{(90)}} = Va.$$

$$\begin{aligned} \log V &= 7,6989700 \\ \text{(Tab. 15)}\quad \log a &= 8,5086046 \\ \hline \log \alpha &= 6,2075746 \end{aligned}$$

$$\alpha = 1612778^{fr}.$$

Par conséquent, la Compagnie doit payer chaque année 1612778^{fr}, c'est-à-dire 1500000^{fr} pour l'intérêt et 112778^{fr} pour l'amortissement; l'amortissement à la fin de la première année est donc de 226 obligations.

$$\begin{aligned} \log \alpha &= 3,50860 \\ \text{Ct} \log r^n &= 8,84465 \\ \log r^{44} &= 0,56484 \\ \hline \log x &= 2,91809 \end{aligned}$$

$$x = 828,12 \text{ obligations.}$$

L'amortissement à la fin de la quarante-quatrième année est donc de 828 obligations.

Exemple XCIV. — *Quel est le taux moyen de l'intérêt d'une*

(*) J'ai dit *à peu de chose près;* car, en rachetant les obligations par nombres entiers, les fractions d'obligations supprimées, s'accumulant d'année en année, peuvent produire à la fin une différence d'une obligation.

obligation émise à 400^{fr}, *produisant un intérêt de* 20^{fr} *par an, et remboursable en* 99 *ans, si la Compagnie la rachète à* 500^{fr} ? (Chemins de fer Ouest de la Suisse.)

Soient α l'annuité et x le nombre d'obligations émises. La Compagnie rachetant les obligations à 500^{fr} et donnant 20^{fr} d'intérêt par an, ou 4 pour 100, la valeur actuelle de l'annuité à fournir par la Compagnie s'exprime par la formule

$$x.500 = \frac{\alpha}{t}\left(1 - \frac{1}{r^{99}}\right) = \alpha.\varphi_{(99,t)}.$$

Mais les obligations sont émises à 400^{fr}; la Compagnie, au lieu de recevoir $x.500$, ne reçoit que $x.400$. L'annuité α restant la même, le taux τ est plus élevé que t. On a

$$x \times 400 = \frac{\alpha}{\tau}\left(1 - \frac{1}{\rho^{99}}\right) = \alpha.\varphi_{(99,\tau)}.$$

En divisant ces deux équations l'une par l'autre, on obtient

$$\frac{500}{400} = \frac{\varphi_{(t)}}{\varphi_{(\tau)}};$$

d'où

$$\frac{1}{\varphi_{(\tau)}} \quad \text{ou} \quad a' = \frac{500}{400.\varphi_{(t)}} = \frac{500.a}{400}.$$

$$\begin{aligned} \log 500 &= 2,69897 \\ \log a &= 8,61110 \\ \text{Ct} \log 400 &= 7,39794 \\ \hline \log a' &= 8,70801 \end{aligned}$$

Ce nombre est compris dans la Table entre 5 et $5\frac{1}{8}$ pour 100 :

5 pour 100	.....	8,70245
$5\frac{1}{8}$ »	.....	8,71279
	Différence.....	1034

La différence entre le nombre trouvé et celui qui correspond à 5 pour 100 est 556; le taux est donc égal à

$$5 + \frac{556}{1034}.\frac{1}{8} = 5,0672 \text{ pour } 100,$$

à peu près, ou

$$\tau = 2,5336 \text{ pour } 100, \text{ par semestre.}$$

Pour obtenir une valeur plus exacte, on peut diviser l'équation (15) par $\frac{C}{\tau}$; ce qui donne

$$\tau = \frac{\alpha}{2C}(1 - \rho^{-2n}) - \frac{\alpha\tau^2}{2C} \cdot \frac{r^{-n} - \rho^{-2n}}{\rho^2 - r},$$

et, en remplaçant dans cette équation τ par la valeur approchée que nous venons de trouver, nous obtenons pour $\tau = 0,0253$ et $\rho = 1,0253$

$$\begin{aligned}
\log\alpha &= 1,3100664 \\
\text{Ct}\log 2 &= 9,6989700 \\
\log(1 - \rho^{-2n}) &= 9,9969037 \\
\text{Ct}\log C &= 7,3979400 \\
\hline
\log &= 8,4038801 \\
& \ 0,0253443
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\frac{\alpha}{2} &= 1,00904 \\
\log\tau^2 &= 6,80624 \\
\log(r^{-n} - \rho^{-2n}) &= 8,12995 \\
\text{Ct}\log C &= 7,39794 \\
\text{Ct}\log(\rho^2 - r) &= 1,94923 \\
\hline
\log &= 5,29240
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
0,000019607 \\
0,0253443 \\
\hline
0,025324693
\end{array}$$

Le taux vrai de l'emprunt est donc 2,5325 pour 100 par semestre, ou 5,065 pour 100 par an, payables par semestre.

Exemple XCV. — *Une Compagnie émet* 100000 *obligations de* 500^{fr} *produisant* 3 *pour* 100 *d'intérêt payables par semestre, et remboursables en* 99 *ans; à quel prix doivent-elles être émises pour rapporter* 5 $\frac{1}{2}$ *pour* 100, *et combien restera-t-il d'obligations au commencement de la soixante-quinzième année?* (Sud de la France.)

1° $$100000 \times x = \frac{\alpha}{2\tau}(1 - \rho^{-2n}) - \frac{\alpha\tau}{2} \cdot \frac{r^{-n} - \rho^{-2n}}{\rho^2 - r};$$

mais

$$\alpha = \frac{V}{\varphi_{(99)}} = \frac{100000 \times 500}{\varphi_{(99)}}.$$

On a donc

$$100000x = \frac{100000 \times 500}{2 \times \varphi_{(99)}} \cdot \frac{1}{\tau}(1 - \rho^{-2n}) - \frac{100000 \times 500 \times \tau}{2 \times \varphi_{(99)}} \cdot \frac{r^{-99} - \rho^{198}}{\rho^2 - r}$$

ou

$$x = \frac{500}{2 \cdot \varphi_{(99)}} \cdot \frac{1}{\tau}(1 - \rho^{-198}) - \frac{500 \times \tau}{2 \cdot \varphi_{(99)}} \cdot \frac{r^{-99} - \rho^{-198}}{\rho^2 - r}.$$

$$\begin{aligned}
\log \rho^{-2n} &= 7,6671975 \\
\rho^{-2n} &= 0,004647265 \\
1 - \rho^{-2n} &= 0,995352735 \\
\log &= 9,9979770 \\
\log 500 &= 2,6989700 \\
\text{(Tab. 15)} \quad \text{Ct} \log \varphi_{(99)} &= 8,5010437 \\
\text{Ct} \log 2 &= 9,6989700 \\
\text{Ct} \log \tau &= 1,5606673 \\
\hline
\log &= 2,4576280
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&286,83225 \\
&0,41414 \\
\hline
&286,41811
\end{aligned}$$

ou

$$286^{fr},41\tfrac{4}{5}.$$

$$\begin{aligned}
\log r^{-n} &= 8,72911 \\
r^{-n} &= 0,053594 \\
\rho^{-2n} &= 0,004647 \\
\hline
&\ 0,048947
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log &= 8,68972 \\
\log \frac{500}{2\varphi_{(99)}} &= 0,89898 \\
\log \tau &= 8,43933 \\
\text{Ct} \log (\rho^2 - r) &= 1,58912 \\
\hline
\log &= 9,61715
\end{aligned}$$

$$0^{fr},41414.$$

2° Soit y le nombre d'obligations restant à rembourser au commencement de la soixante-quinzième année; le capital restant est alors $500 . y$; d'autre part, il est égal à la valeur actuelle des annuités qui ne sont pas encore payées, c'est-à-

dire de 99 — 74 annuités; par conséquent,

$$500y = \frac{\alpha}{i}\left(1 - \frac{1}{r^{25}}\right) = \alpha . \varphi_{(25)} = \frac{100000 \times 500 \times \varphi_{(25)}}{\varphi_{(99)}};$$

$$y = \frac{100000 \times \varphi_{(25)}}{\varphi_{(99)}}.$$

$$\begin{aligned} \log 100000 &= 5 \\ \text{Ct} \log \varphi_{(99)} &= 8,50104 \\ \log \varphi_{(25)} &= 1,24088 \\ \hline \log y &= 4,74192 \\ y &= 55198, \end{aligned}$$

obligations à rembourser au commencement de la soixante-quinzième année.

Exemple XCVI. — *Une Compagnie désire contracter un emprunt de* 100000000^{fr} *effectifs au taux de* 5 *pour* 100, *payables par semestres; elle émet à cet effet un certain nombre d'obligations de* 1000^{fr} *rapportant un intérêt de* 40^{fr} *et remboursables en* 35 *ans au moyen de tirages au sort annuels, de manière qu'il reste chaque année, pour les douze premiers numéros, des primes dont le montant s'élève à* 180000^{fr}. *Combien doit-elle émettre d'obligations, et à quel prix?*

Soient

x le nombre des obligations;
K la valeur actuelle des 35 annuités de 180000^{fr};
S la valeur actuelle de 35 annuités pour l'intérêt et l'amortissement d'une seule obligation.

Nous avons

$$100000000 = xS + K;$$

d'où

$$x = \frac{100000000 - K}{S},$$

$$K = 180000 \cdot \frac{1 - \rho^{-2n}}{\rho^2 - 1} = \frac{180000}{\frac{2}{\tau}}(1 - \rho^{-2n})\frac{2\tau}{\rho^2 - 1},$$

$$K = \frac{180000}{2} \cdot \varphi_{(2n)} \cdot \frac{1}{Q_2}.$$

$$\log 90000 = 4,9542425$$
$$\text{(Tab. 11)}\quad \log \varphi_{(70)} = 1,5171676$$
$$-Q_2 = -\quad 53950$$
$$\log K = 6,4660151$$

$$K = 2924254^{fr}$$
$$100000000$$
$$xS = 97075746$$

Calcul de S *d'après la formule* (15).

$$\log 1000 = 3$$
$$\text{(Tab. 23)}\quad \log a = 8,7289810$$
$$\text{Ct}\log 2 = 9,6989700$$
$$\text{(Tab. 11)}\quad \text{Ct}\log a = 1,5171676$$
$$\log = 2,9451186$$

$$881^{fr},2896.$$

$$\log \frac{\alpha}{2} = 1,42795$$
$$\log \tau = 8,39794$$
$$\log(r^{-n} - \rho^{-2n}) = 8,88002$$
$$\text{Ct}\log(\rho^2 - r) = 1,97367$$
$$\log = 0,67958$$
$$4,7817$$

$$881,2896$$
$$4,7817$$
$$S = 876,5079$$

$$\log xS = 7,9871108$$
$$\log S = 2,9427559$$
$$\log x = 5,0443549$$

$x = 110752,8$ (nombre d'obligations).

Le prix de chaque obligation est égal à $\frac{100000000}{110752,8}$.

$$\log 100000000 = 8,0000000$$
$$\log x = 5,0443549$$
$$\log = 2,9556451$$

$$902^{fr},91125.$$

Le nombre des obligations est donc de 110753, et leur prix de $902^{fr},91\frac{1}{8}$.

§ LI.

Dans le remboursement des obligations, l'annuité et par conséquent le taux d'intérêt pour un prix quelconque sont constants par rapport à la Compagnie qui a reçu un capital fixe pour un certain nombre d'annuités invariables.

Le cas serait le même pour l'obligataire, si le prix de l'obligation était *au pair*. Mais, comme les obligations sont toujours au-dessous du pair, l'obligataire reçoit, quand il est remboursé, une somme plus considérable que celle qu'il a versée; et, pour évaluer exactement le taux d'intérêt, il faut tenir compte de cette différence entre le prix et la somme remboursée.

Il est évident que l'intérêt d'une obligation est d'autant plus grand que le nombre des années est moindre.

Soient

V le capital à rembourser pour chaque obligation;
x le prix de l'obligation;
$\frac{1}{2}$ son intérêt semestriel:
τ le taux semestriel vrai;
n l'année à la fin de laquelle l'obligation est remboursée.

Le prix de l'obligation étant égal à la valeur actuelle de $2n$ payements semestriels $\frac{1}{2}$, ajoutée à la valeur actuelle de la somme V payable à la fin de n années, nous avons

$$x = \frac{1}{2\tau}(1 - \rho^{-2n}) + V\rho^{-2n},$$

d'où

$$\tau = \frac{1}{2x} + \frac{V\tau - \frac{1}{2}}{x\rho^{2n}} \tag{16}$$

et

$$(17) \qquad \rho^{\tau n} = \frac{V\tau - \frac{1}{2}}{x\tau - \frac{1}{2}}.$$

A l'aide de la formule (16) et de corrections successives, on peut trouver le *taux d'intérêt;* la formule (17) peut s'appliquer à l'époque à laquelle l'obligation doit être remboursée pour produire un intérêt donné.

Exemple XCVII. — *Des obligations de* 500^{fr}, *produisant un intérêt de* 15^{fr} *et remboursables en* 90 *ans, sont émises à* 275^{fr}. *Quel est le taux de l'intérêt à payer par la Compagnie, et quel est le taux de l'intérêt de l'obligation remboursable à la fin d'une année quelconque?*

On a vu, page 136, que le taux d'une obligation a deux limites: une limite supérieure $\frac{\alpha}{C}$ et une limite inférieure $\frac{I}{C}$, c'est-à-dire $\frac{\alpha}{C} > 2\tau > \frac{I}{C}$. On a donc, en exprimant par x le nombre d'obligations,

$$\alpha = \frac{500.x}{\varphi} = 500 \times x \times a \quad \text{et} \quad C = 275 \times x;$$

donc

$$\frac{\alpha}{C} = \frac{500.a}{275}, \quad \frac{I}{C} = \frac{15}{275}.$$

$$\begin{aligned} \log 500 &= 2,69897 \\ \log a &= 8,50860 \\ \text{Ctlog} 275 &= \underline{7,56067} \\ \log \frac{\alpha}{C} &= 8,76824 \\ & \quad 0,058646 \end{aligned}$$

$$\frac{I}{C} = \frac{15}{275} = 0,054545. \ldots,$$

Le taux d'intérêt est donc compris entre 5,86 et 5,45

pour 100 par an. Désignons par y le prix d'émission d'une obligation.

Si $\tau = 2,91$ pour 100 par semestre,	$y = 275,005$
Si $\tau = 2,92$.....	$y = 274,090$
Différence.....	915

par conséquent, le taux moyen est de

$$2,91 + \frac{5}{915} \cdot 0,01 = 2,910055 \text{ pour } 100$$

par semestre ou 5,82011 pour 100 par an.

Le calcul du *taux* d'une obligation remboursable à une époque quelconque diffère des calculs du § XXX, parce qu'il faut tenir compte en même temps des annuités et d'une somme payable dans un temps donné. Si, par exemple, on cherchait à connaître le taux d'intérêt d'une obligation remboursable à la fin de la 40e année, on trouverait, à l'aide de la formule (16),

$$V = 500, \quad x = 275,$$

$$\frac{I}{2} = \frac{15}{2} = 7,5, \quad \frac{I}{2x} = \frac{7,5}{275} = \frac{3}{110} = 0,02727 \ldots$$

Posons donc

$$\tau = \frac{3}{110}, \quad V\tau = 13,636. \ldots, \quad \rho = \frac{113}{110}, \quad \log\rho = 0,0116857;$$

la formule (16) devient

$$\tau = 0,272727 + \frac{6,13636}{275 \times \rho^{80}},$$

$$\begin{aligned} \log 6,13636 &= 0,78791 \\ \text{Ct}\log 275 &= 7,56067 \\ \text{Ct}\log \rho^{80} &= 9,06514 \\ \hline \log &= 7,41372 \\ &= 0,0025925 \end{aligned}$$

par conséquent

$$\tau = 0,0272727 + 0,0025925 = 0,0298652 \text{ (valeur approchée)};$$

pour répéter l'opération, soit

$$\tau = 0{,}0298652, \quad \rho = 1{,}0298652,$$
$$\log\rho = 0{,}0127804 \quad \text{et} \quad V\tau = 14{,}9326;$$

la valeur de τ corrigée *une fois* est

$$\tau = 0{,}0272727 + \frac{7{,}4326}{275 \times \rho^{50}}.$$

$$\begin{aligned} \log 7{,}4326 &= 0{,}87114 \\ \text{Ct}\log 275 &= 7{,}56067 \\ \text{Ct}\log\rho^{50} &= 8{,}97757 \\ \hline \log &= 7{,}40938 \\ & \quad 0{,}002567 \end{aligned}$$

ou

$$\tau = 0{,}0272727 + 0{,}002567 = 2{,}9840 \text{ pour } 100$$

par semestre ou 5,968 pour 100 par an.

Si enfin on voulait connaître à quelle époque une obligation doit être remboursée pour rapporter au porteur $5\frac{3}{4}$ pour 100 par an, par exemple, on aurait

$$\rho^{2n} = \frac{V\tau - \frac{1}{2}}{x\tau - \frac{1}{2}}, \quad \tau = 2\tfrac{3}{4} \text{ pour } 100$$

par semestre, ou

$$\rho^{2n} = \frac{6{,}875}{0{,}40625} = \frac{220}{13}.$$

$$\begin{aligned} \log 220 &= 2{,}34242 \\ \log 13 &= 1{,}11394 \\ \hline \log\frac{220}{13} &= 1{,}22848 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\log\frac{220}{13} &= 0{,}61424 \\ \log^2 &= 9{,}78834 \\ \text{(Tab. 57) } \log^2\rho &= 8{,}09025 \\ \hline \log n &= 1{,}69809 \end{aligned}$$

$$n = 49^{\text{ans}},90.$$

Afin de mieux montrer les divers taux d'intérêt des différentes obligations dont il est question dans l'exemple précédent, j'ai présenté ci-dessous le tableau suivant :

Années de remboursement.	Intérêt pour 100.
1	74,436
2	36,677
7	13,979
10	10,288
15	8,302
20	7,324
25	6,752
30	6,399
40	5,968
46	5,821 (taux moyen)
50	5,761
70	5,555
80	5,514
90	5,490

Il faut remarquer que le taux d'intérêt est payable *par semestre;* par exemple, le taux de l'obligation remboursée à la fin de la 1re année est de 37,21799 pour 100 *par semestre*, ce qui correspond à un intérêt de 0,88288 pour un capital de 1fr à la fin d'une année entière.

§ LII. — Des annuités croissant ou décroissant en progression arithmétique.

Au lieu de payer des annuités invariables, il peut arriver que les annuités croissent ou décroissent dans un rapport constant, de manière à rendre constante, qu'elle soit positive ou négative, la différence entre chaque annuité et celle qui la précède.

Calculons donc la valeur actuelle de n annuités : si l'on cède α^{fr} la première année, $(\alpha + d)^{fr}$ la seconde, $(\alpha + 2d)^{fr}$ la troisième, et ainsi de suite, l'annuité augmente de d^{fr} chaque année.

Pour simplifier la question, appelons

V la valeur actuelle de l'annuité en question;

φ la valeur actuelle de n annuités de 1^{fr};

S la valeur actuelle d'une annuité pour n années, augmentant dans l'ordre des nombres naturels, à savoir de 1^{fr} la première année, de 2^{fr} la seconde, de 3^{fr} la troisième, etc.

On aura alors

$$S = \frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + \ldots + \frac{n}{r^n},$$

$$\varphi = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \ldots + \frac{1}{r^n};$$

par conséquent

$$S - \varphi = \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3} + \ldots + \frac{n-1}{r^n}$$

ou

$$r(S - \varphi) = \frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \ldots + \frac{n-1}{r^{n-1}} = S - \frac{n}{r^n}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$\varphi = \frac{1}{i}(1 - r^{-n}) \quad \text{ou} \quad r^{-n} = 1 - i\varphi;$$

par conséquent

$$(18) \qquad r(S - \varphi) = S - n + ni\varphi, \quad \text{et} \quad S = \left(n + \frac{r}{i}\right)\cdot\varphi - \frac{n}{i},$$

valeur actuelle d'une rente annuelle correspondant aux n premiers nombres naturels.

Mais

$$\begin{aligned} V &= \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha + d}{r^2} + \frac{\alpha + 2d}{r^3} + \ldots + \frac{\alpha + (n-1)d}{r^n} \\ &= \alpha\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \ldots + \frac{1}{r^n}\right) + d\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3} + \ldots + \frac{n-1}{r^n}\right) \\ &= \alpha\varphi + d(S - \varphi), \end{aligned}$$

et, en remplaçant S par sa valeur,

$$(19) \qquad V = \left(\alpha + nd + \frac{d}{i}\right)\cdot\varphi - \frac{nd}{i}.$$

Au lieu de cette formule, on peut employer la suivante :

$$Vt = \alpha + \frac{d}{t} - \frac{1}{r^n}\left(\alpha + \frac{d}{t} + nd\right).$$

Si α et $d = 1$, on obtient alors

$$St = \frac{r}{t} - \frac{1}{r^n}\left(n + \frac{r}{t}\right),$$

au lieu de la formule (18).

Si l'annuité est décroissante, c'est-à-dire si l'on paye chaque année d^{fr} de moins, il n'y a qu'à changer le signe de d.

Exemple XCVIII. — *Quelle est la valeur actuelle, à* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100, *d'une annuité croissante pour* 9 *ans? Elle est de* 1^{fr} *la première année, de* 2^{fr} *la deuxième, de* 3^{fr} *la troisième, etc.*

Ici $t = 0{,}045$, $r = 1{,}045$ et $n = 9$; la formule (18) donne donc

$$S = \left(9 + \frac{1{,}045}{0{,}045}\right)\varphi - \frac{9}{0{,}045} = \frac{290}{9}\cdot\varphi - 200,$$

$$\begin{aligned}
\log 290 &= 2{,}4623980\\
\text{Ct}\log 9 &= 9{,}0457575\\
\log\varphi &= 0{,}8614621\\
\hline
\log\left(\frac{290}{9}\right)\cdot\varphi &= 2{,}3696176\\
\frac{290}{9}\cdot\varphi &= 234{,}21658\\
S + 200 &= 234{,}21658\\
\hline
S &= 34{,}217
\end{aligned}$$

On pourrait résoudre ce problème à l'aide de la formule

$$St = \frac{r}{t} - \frac{1}{r^n}\left(n + \frac{r}{t}\right).$$

On obtient alors

$$\frac{r}{t} = \frac{1{,}045}{0{,}045} = \frac{209}{9} = 23{,}22222\ldots,$$

$$n + \frac{r}{t} = 9 + 23{,}22222\ldots = 32{,}22222\ldots.$$

$$\log\left(n+\frac{r}{t}\right) = 1,5081550$$
$$\text{Ct}\log r^n = 9,8279534$$
$$\log\left(n+\frac{r}{t}\right)\frac{1}{r^n} = 1,3361084$$
$$\frac{1}{r^n}\left(n+\frac{r}{t}\right) = 21,682452,$$
$$St = 23,22222 - 21,682452 = 1,53977.$$
$$\log St = 0,1875142$$
$$\log t = 8,6532125$$
$$\log S = 1,5343017$$
$$S = 34,217 \text{ comme plus haut.}$$

Exemple XCIX. — *Trouver la valeur actuelle, à* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100, *d'une annuité croissante d'une durée de* 9 *ans, en supposant qu'elle est* 1800^{fr} *la première année et qu'elle augmente de* 100^{fr} *chaque année consécutive.*

$$V = \frac{44300}{9}\cdot\varphi - 20000.$$
$$\log 44300 = 4,6460437$$
$$\text{Ct}\log 9 = 9,0457575$$
$$\log\varphi = 0,8614621$$
$$\log = 4,5532633$$
$$\frac{44300}{9}\cdot\varphi = 35778,595,$$
$$V + 20000 = 35778,595, \quad V = 15778^{fr},60.$$

Exemple C. — *Chercher la valeur actuelle, à* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100, *d'une rente décroissante à payer pendant* 19 *ans; elle est de* 3330^{fr} *la première année, de* 2070^{fr} *la dernière et décroît en général de* 70^{fr} *par an.*

Dans ce cas,

$$\alpha = 3330, \quad d = -70, \quad n = 19 \quad \text{et} \quad r = 1,035;$$

nous avons donc, d'après la formule (19),

$$V = \frac{19 \times 70}{0,035} = 38000^{fr},$$

valeur cherchée. Nous pouvons noter ici que la valeur actuelle des 19 annuités est un nombre entier.

Exemple CI. — *Chercher, d'après la* Table de Northampton, *la valeur actuelle d'une* annuité viagère *temporaire, d'une durée de* 19 *ans, constituée sur une seule tête âgée de* 20 *ans, le taux étant de* 5 *pour* 100.

D'après cette Table (voir *Inwood*, p. 145), sur 11650 enfants nouveau-nés, il y a, au commencement de la 20e année, 5132 survivants, 5060 à 21 ans, 4985 à 22, et l'on compte 75 décès chaque année jusqu'à la fin de la 39e année, où il y a encore 3710 individus âgés de 39 ans.

Par conséquent, si une Compagnie d'assurances sur la vie assure à 5132 individus âgés de 20 ans une annuité viagère de 1fr pendant 19 ans, elle doit payer, d'après les observations faites à Northampton, 5060fr à la fin de la première année à autant de survivants, 4985fr à la fin de la deuxième année 4910fr à la fin de la troisième, etc., et 3710fr à la fin de la dernière année à autant de survivants âgés de 39 ans.

La valeur actuelle de toutes ces sommes est égale à la valeur de 5132 annuités de 1fr pour 19 ans, constituées sur la vie de personnes âgées de 20 ans. La question est donc ramenée à celle-ci : calculer le $\frac{1}{5132}$ de la valeur actuelle d'une annuité décroissante, d'une durée de 19 ans, étant de 5060fr la première année, diminuant de 75fr chaque année, et étant de 3710fr au dernier payement.

Par conséquent,

$$a = 5060, \quad d = -75, \quad n = 19 \quad \text{et} \quad r = 1{,}05,$$

$$a + nd + \frac{d}{t} = 5060 - 1425 - 1500 = 2135$$

et

$$V = \frac{2135}{5132} \cdot \varphi + \frac{28500}{5132}.$$

$$\log 2135 = 3,3293979$$
$$\text{Ct}\log 5132 = 6,2897134$$
$$\log \varphi = 1,0822582$$
$$\log\left(\frac{2135}{5132}\cdot\varphi\right) = 0,7013695$$

$$\frac{2135}{5132}\cdot\varphi = 5,027701$$
$$\frac{28500}{5132} = 5,553391$$
$$V = 10,581092$$

valeur de l'annuité viagère.

Exemple CII. — *Une dette de rentes* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100, *dont le montant s'élève à* 1700000^{fr}, *doit être rachetée en* 15 *ans au prix moyen de* $82\frac{6}{17}$ *francs et par des annuités diminuant de* 10000^{fr} *chaque année. Quel doit être le premier payement?*

La formule (19) donne immédiatement

$$\alpha = \frac{Vt + nd}{t\varphi} - \left(nd + \frac{d}{t}\right);$$

une rente $3\frac{1}{2}$ à $82\frac{6}{17}$ correspond au $4\frac{1}{4}$ pour 100; par conséquent,

$$d = -10000, \quad n = 15 \quad \text{et} \quad t = 0,0425.$$
$$Vt = 1700000$$
$$nd = -150000$$
$$Vt + nd = 1550000$$

$$\log(Vt + nd) = 6,1903317$$
$$\text{Ct}\log t = 1,3716111$$
$$\log a = 8,9615180$$
$$\log = 6,5234608$$

$$\frac{Vt + nd}{t\varphi} = 3337804$$
$$\left(nd + \frac{d}{t}\right) = 385294$$
$$\text{premier payement } \alpha = 3723098$$

§ LIII. — Annuités croissant ou décroissant en progression géométrique.

On ne saurait rencontrer ces annuités dans la pratique ordinaire des affaires; et, si le cas se présentait, il ne pourrait être que très-rare. Afin, toutefois, de ne négliger aucun côté de la question, je vais indiquer la manière de les calculer.

Soit α la première annuité, e le rapport entre deux annuités consécutives, ou le rapport constant de la progression géométrique, t le taux de l'intérêt et V la valeur actuelle de cette annuité.

Nous avons

$$V = \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha e}{r^2} + \frac{\alpha e^2}{r^3} + \ldots + \frac{\alpha e^{n-1}}{r^n}$$

et

$$\frac{Ve}{r} = \frac{\alpha e}{r^2} + \frac{\alpha e^2}{r^3} + \ldots + \frac{\alpha e^n}{r^{n+1}};$$

la différence entre ces deux équations est

$$V\left(1 - \frac{e}{r}\right) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha e^n}{r^{n+1}}, \quad \text{d'où} \quad V = \frac{\alpha}{r-e}\left(1 - \frac{e^n}{r^n}\right),$$

Exemple CIII. — *Quelle est la valeur actuelle de* 18 *annuités, dont la première est de* 1000^{fr}, *la seconde de* 1010, *la troisième de* 1020,100, *la quatrième de* 1020,301, ..., *de telle sorte que chaque annuité est égale à la précédente augmentée de* 1 *pour* 100 *de sa valeur, le taux de l'intérêt étant de* 4 *pour* 100?

Le rapport constant est 1,01; par conséquent

$$V = \frac{1000}{0,03}\left[1 - \left(\frac{1,01}{1,04}\right)^{18}\right].$$

$$\log 1,01^{18} = 0,0777847$$
$$\log 1,04^{18} = 0,3066001$$
$$\log = 9,7711846$$

$$\left(\frac{1,01}{1,04}\right)^{18} = 0,5904520$$
$$1 - \left(\frac{1,01}{1,04}\right)^{18} = 0,4095480$$
$$V = 13651^{fr},60.$$

Exemple CIV. — *Quelle est la valeur actuelle, à* 5 *pour* 100, d'une annuité perpétuelle *croissante, la première étant de* 1000^{fr}, *la seconde de* 1010, *et, comme dans l'exemple précédent, chaque annuité étant égale à* 1,01 *de la précédente?*

Dans ce cas, n est infini; par conséquent, la puissance de la fraction $\frac{e}{r}$ devient infiniment petite, et

$$V = \frac{\alpha}{e - r} = \frac{1000}{0,04} = 25000.$$

Il est à remarquer que les payements finissent par devenir infiniment grands. Ils s'élèvent déjà à la fin :

De la 995e année	à	plus de	.....	1 million
De la 1389e »	»	»	.....	1 billion
De la 2083e »	»	»	.....	1 trillion

et toutes ces valeurs, au bout d'un nombre *illimité* d'années, deviennent plus grandes qu'un nombre quelconque, quelque grand qu'il puisse être; néanmoins la valeur actuelle de ces payements infiniment grands, en nombre infini, est exactement de 25000^{fr}.

§ LIV. — Parités ou valeurs relatives des annuités.

Le nom de *parité*, ou valeur relative d'une annuité par rapport à une autre annuité au même taux, a été donné à l'évaluation d'une annuité au même taux qu'une autre annuité dont la valeur est connue.

Lorsqu'on envisage 2 annuités *dont la durée est la même*, leurs valeurs relatives sont toujours proportionnelles à leurs rentes annuelles. Ainsi, par exemple, si le prix des consolidés 3 pour 100 est de 90^{lst}, le prix du $3\frac{1}{2}$ pour 100 sera de 105^{lst}, au même taux, et abstraction faite de toute cir-

constance extérieure; car le taux de l'intérêt produit est, dans les deux cas, de $3\frac{1}{3}$ pour 100.

Si, au contraire, 2 annuités sont de différentes durées, on déterminera d'abord le taux de l'intérêt produit par la première, et ensuite la valeur actuelle de l'autre annuité au même taux.

Exemple CV. — *Une annuité perpétuelle de* 3400^{fr} *coûte* 108800; *quelle sera la valeur d'une rente de* 2250^{fr} *pendant* 19 *ans?*

Le taux de l'annuité perpétuelle est

$$\frac{340000}{108800} = 3\tfrac{1}{8} \text{ pour } 100;$$

nous n'avons maintenant qu'à calculer la valeur actuelle de 19 annuités de 2250^{fr} à ce même taux.

$$\begin{aligned} \log 2250 &= 3,3521825 \\ \log a &= 8,8487351 \\ \hline \log V &= 4,5034474 \\ V &= 31874^{fr},79, \end{aligned}$$

valeur cherchée.

Exemple CVI. — *On paye* 32490 *pour une rente de* 1800^{fr} *d'une durée de* 38 *ans; quelle somme faudrait-il verser pour la même rente, si l'on doublait le nombre des années?*

$$\begin{aligned} \log 1800 &= 3,25527 \\ \log 32490 &= 4,51175 \\ \hline \log a &= 8,74352 \end{aligned}$$

pour 38 ans; ce nombre correspond à $4\frac{1}{2}$ pour 100; par conséquent, pour évaluer 76 annuités de 1800^{fr} à $4\frac{1}{2}$ pour 100, nous avons

$$\begin{aligned} \log 1800 &= 3,25527 \\ \log a &= 8,66880 \\ \hline \log V &= 4,58647 \\ V &= 38590^{fr}, \end{aligned}$$

parité cherchée.

QUATRIÈME PARTIE.

ANNUITÉS DIFFÉRÉES.

Nos recherches relatives aux annuités immédiates peuvent s'appliquer directement à toute autre annuité, différée ou arriérée.

Si V exprime la valeur actuelle d'une annuité immédiate, la valeur de la même annuité, *différée* ou avec *entrée*, sera Vr^m, dans laquelle valeur l'exposant est *positif* lorsque l'annuité est arriérée et *négatif* lorsqu'elle est différée.

Par conséquent, on peut trouver la valeur d'une annuité quelconque en multipliant ou en divisant V par le montant de 1^{fr} à l'époque de l'entrée ou de la réversion.

§ LV. — Valeur actuelle d'une annuité différée.

La valeur actuelle d'une annuité différée est égale à la somme des valeurs actuelles de chaque payement particulier. c'est-à-dire à la somme qui, placée à intérêts composés, pourvoirait à tous ces divers payements de l'annuité à leurs termes d'échéance.

Soient

α l'annuité;
r le montant de 1^{fr} dans un an;
n le nombre des payements annuels;
d le nombre d'années pendant lesquelles l'annuité est différée;
D la valeur actuelle de l'annuité différée.

La première annuité de α^{fr} est payable dans $(d+1)$ années, et sa valeur actuelle est $\alpha r^{-(d+1)}$; la deuxième annuité est payable dans $(d+2)$ années, et sa valeur actuelle est $\alpha r^{-(d+2)}$; la troisième annuité est payable dans $(d+3)$ années, et sa valeur actuelle est $\alpha r^{-(d+3)}$, etc.

Il suit de là que la somme de toutes ces valeurs actuelles sera

$$D = \alpha r^{-(d+1)} + \alpha r^{-(d+2)} + \ldots + \alpha r^{-(d+n)};$$

en multipliant par r, nous avons

$$rD = \alpha r^{-d} + \alpha r^{-(d+1)} + \ldots + \alpha r^{-(d+n-1)};$$

en retranchant la première équation de la deuxième,

$$tD = \alpha r^{-d} - \alpha r^{-(d+n)},$$

d'où l'on tire

$$D = \frac{\alpha}{t}\left[r^{-d} - r^{-d+n}\right]. \tag{20}$$

§ LVI.

La valeur actuelle de l'annuité différée que nous venons d'obtenir peut s'écrire comme il suit :

$$D = \frac{\alpha}{t}\left[1 - r^{-(d+n)}\right] - \frac{\alpha}{t}\left(1 - r^{-d}\right);$$

par conséquent, *la valeur actuelle d'une annuité différée est égale à la différence entre les valeurs actuelles de deux annuités immédiates du même revenu annuel, dont l'une durerait jusqu'au terme de la dernière annuité, l'autre jusqu'à l'époque de l'entrée dans l'annuité différée.*

Ainsi la valeur actuelle, à $3\frac{1}{2}$ pour 100, de 15 annuités de 1^{fr}, différées de 12 ans, est égale à une annuité immédiate pour 27 ans, diminuée d'une annuité immédiate pour 12 ans.

Valeur actuelle pour 27 ans.....	17,285
» » 12 ans.....	9,663
Annuité différée.....	7,622

La formule (20) peut s'écrire encore comme il suit :

$$D = \frac{\alpha}{ir^d}(1 - r^{-n});$$

et, si nous désignons par φ la valeur actuelle de n annuités de 1^{fr}, ou

$$\varphi = \frac{1}{i}(1 - r^{-n}),$$

nous avons

$$D = \frac{\alpha\varphi}{r^d}. \tag{21}$$

Si nous appelons D l'annuité différée, et V la même annuité, mais immédiate, la valeur de l'annuité différée sera

$$D = \frac{V}{r^d},$$

c'est-à-dire que *la valeur actuelle d'une annuité différée est égale à la valeur actuelle de la même annuité immédiate, escomptée pour le nombre d'années pendant lesquelles l'annuité est différée.*

Ainsi la valeur actuelle de 15 annuités de 1^{fr} à commencer dans 12 ans est égale à la valeur actuelle de 15 *annuités immédiates* de 1^{fr}, escomptées pour 12 ans ou :

$$\begin{aligned} \text{(Tab. 19)}\quad \log\varphi &= 0,06135 \\ \log r^d &= 0,17928 \\ \hline \log D &= 0,88207 \\ D &= 7^{fr},622, \end{aligned}$$

comme plus haut.

§ LVII. — Réversions ou l'intérêt et l'annuité sont payables annuellement.

Exemple CVII. — *Quelle est l'annuité qui, d'une durée de 19 ans et différée de 7 ans, sera rachetée par* 6800000^{fr}, *au taux de* $3\frac{5}{8}$ *pour* 100 *par an?*

$$6800000 = \frac{\alpha\varphi}{r^d},$$

d'où

$$\alpha = 6800000 \times a \times r^d.$$

$$\begin{aligned} \log 6800000 &= 6,8325089 \\ \text{(Tab. 20)}\quad \log a &= 8,8676632 \\ \log r^d &= 0,1082518 \\ \hline \log \alpha &= 3,8084239 \end{aligned}$$

$$\alpha = 64331 5^{fr},30.$$

Exemple CVIII. — *Si la réversion d'une propriété, d'une durée de 21 ans, différée de 3 ans 7 mois, coûte 24500fr, quel revenu doit-elle produire pour rapporter à l'acheteur $4\frac{1}{4}$ pour 100 de son argent?*

$$\alpha = 24500 . a . r^{\left(d+\frac{7}{12}\right)}.$$

$$\begin{aligned} \log 24500 &= 4,38917 \\ \text{(Tab. 23)}\quad \log a &= 8,86291 \\ \log r^3 &= 0,05423 \\ \text{(Tab. 52)}\quad \log r^{\frac{7}{12}} &= 0,01054 \\ \hline \log \alpha &= 3,31685 \end{aligned}$$

$$\alpha = 2704^{fr},20.$$

Exemple CIX. — *Quelle somme faudrait-il verser pour une annuité de 36000fr par an, d'une durée de 27 ans, différée de 5 ans, pour que l'acheteur retirât $5\frac{1}{4}$ pour 100 de son argent?*

$$\begin{aligned} \log \alpha &= 4,5563025 \\ \text{(Tab. 33)}\quad \log \mathfrak{p} &= 1,1542120 \\ \text{Ct} \log r^5 &= 9,8888895 \\ \hline \log D &= 4,5994040 \end{aligned}$$

$$D = 39756 1^{fr},20.$$

Exemple CX. — *Chercher la valeur actuelle, à $3\frac{7}{8}$ pour 100, d'une annuité de 7180fr, d'une durée de 62 ans, la première annuité étant payable dans 5 ans 9 mois.*

Si l'annuité était immédiate, le premier payement se ferait

dans un an; par conséquent l'annuité est différée de 4 ans 9 mois.

$$\log 7180 = 3,8561244$$
$$\text{(Tab. 22)}\quad \text{Ct}\log a = 1,3685244$$
$$\text{Ct}\log r^4 = 9,9339559$$
$$\text{(Tab. 52)}\quad \text{Ct}\log r^{\frac{9}{12}} = 9,9876167$$
$$\log D = 5,1462214$$
$$D = 140030^{\text{fr}},10.$$

Exemple CXI. — *Si* 15 *annuités de* 1000^{fr} *sont achetées au prix de* 10000^{fr}, *l'intérêt étant compté à* $5\frac{1}{8}$ *pour* 100, *dans combien de temps l'annuité doit-elle commencer?*

Nous nous servirons, dans ce cas, de la formule (21), d'où l'on peut tirer

$$r^d = \frac{\alpha\varphi}{D}.$$

$$\log\frac{\alpha\varphi}{D} = 0,01252$$
$$\log^2\frac{\alpha\varphi}{D} = 8,09760$$
$$\text{(Tab. 57)}\quad \log^2 r = 8,33658$$
$$\log d = 9,76102$$
$$d = 0,5768 \quad \text{ou} \quad 211 \text{ jours.}$$

Le premier payement aura donc lieu au terme de 211 jours.

Exemple CXII. — *Une annuité de* 1400^{fr}, *d'une durée de* 22 *ans, différée de* 7 *ans* 5 *mois, doit être échangée contre une annuité immédiate pour* 30 *ans. Combien faut-il payer par an, à* $3\frac{1}{4}$ *pour* 100?

Appelons α' l'annuité cherchée.

$$\frac{\alpha\varphi_{(22)}}{r^d} = \alpha'\varphi_{(30)};$$

d'où

$$\alpha' = \frac{\alpha\cdot\varphi_{(22)}}{r^d\varphi_{(30)}},\quad \alpha = 1400,\quad d = 7 + \frac{5}{12},\quad \frac{1}{\varphi_{(30)}} = a_{(30)},$$

$$\log \alpha = 3,14613$$

$$(\text{Tab. } 17)\begin{cases} \text{Ct}\log a_{(22)} = 1,19159 \\ \log a_{(30)} = 8,72166 \\ \text{Ct}\log r^{7} = 9,90277 \end{cases}$$

$$\text{Tab. } 52)\quad \text{Ct}\log r^{\frac{5}{12}} = 9,99421$$

$$\log \alpha' = 2,95636$$

$$\alpha' = 904^{\text{fr}},40.$$

Exemple CXIII. — A *a droit à une jouissance de* 9 *ans sur une propriété d'un revenu annuel de* 3160^{fr}; B *à une jouissance de* 18 *ans sur la même propriété, réversible à l'expiration de ces* 9 *ans; et* C *à une jouissance ultérieure de* 27 *ans, réversible à l'expiration des* 27 *ans; on demande de trouver la valeur actuelle de chaque titre séparé, en comptant le taux à* 4 *pour* 100.

A.	B.	C.
3,4996871	3,4996871	3,4996871
9,1286997	1,1024096	1,2129752
4,3709874	9,8466999	9,5400998
	4,4487966	4,2527621

La valeur actuelle des différents termes est

	fr
A.....	23495,65
B.....	28105,85
C.....	17896,25
Total.....	69497,75

Pour vérifier ce résultat, nous avons

$$\begin{array}{r} 3,4996871 \\ 8,6577164 \\ \hline \log V = 4,8419707 \end{array}$$

$$V = 69497^{\text{fr}},75,$$

comme ci-dessus.

§ LVIII.

Jusqu'ici nous avons supposé l'intérêt et l'annuité payables une fois par an seulement; il sera facile d'appliquer à un

autre cas quelconque la formule $D = \frac{V}{r^d}$, c'est-à-dire de trouver la valeur actuelle de la même annuité immédiate d'après les règles énoncées dans le § XXXVI, et de la diviser ensuite par le montant de 1fr à l'époque de la réversion.

Si l'intérêt et l'annuité sont payables aux mêmes époques ν fois par an, l'annuité sera égale à la rente *annuelle* dont le taux d'intérêt et l'annuité sont ν fois plus petits, et les intervalles des payements ν fois plus grands, c'est-à-dire des années entières.

Enfin, quand les époques pour les payements de l'intérêt et de l'annuité ne coïncident pas, on multiplie ou l'on divise la valeur de l'annuité dont les payements annuels correspondent à ceux de l'intérêt par un facteur constant indépendant du nombre d'années, et dont les logarithmes ont été donnés dans la Table 63 pour les cas ordinaires.

Ainsi, d'après le § XXXVII, lorsque l'annuité se paye plus souvent que l'intérêt, la *rente annuelle diminue*, tandis que le prix d'achat augmente; il faut donc *soustraire* du logarithme de l'annuité le logarithme P du rapport constant.

Si, au contraire, on paye l'annuité moins *souvent* que l'intérêt, l'annuité *augmente*, tandis que le prix d'achat diminue; il faut donc *ajouter* au logarithme de la rente annuelle le logarithme Q du rapport constant.

Exemple CXIV. — *Quelle annuité, d'une durée de* 30 *ans, doit-on donner pour* 8800fr, *si l'intérêt, de* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100, *et l'annuité sont payables* par semestre, *et si le premier payement semestriel ne doit avoir lieu que dans* 7 *ans?*

Si la rente était immédiate, le premier payement semestriel aurait lieu dans 6 mois, par conséquent la rente est différée de $6\frac{1}{2}$ ans; elle est égale à une rente annuelle d'une durée de 60 ans, différée de 13 ans, au taux annuel de $1\frac{3}{4}$ pour 100.

Par conséquent,

$$D = \frac{\alpha\varphi}{r^d}, \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{D r^d}{\varphi}, \quad \alpha = \frac{8800 . r^{13}}{\varphi_{(60)}}.$$

$$\log 8800 = 3,94448$$
$$\log \frac{1}{\varphi_{(6)}} = \log a = 8,43222$$
$$\log r^{13} = 0,09795$$
$$\log \alpha = 2,47465$$
$$\alpha = 298^{fr},30$$

de rente semestrielle, ou 596,60 de rente annuelle.

Exemple CXV. — *Quelle serait l'annuité dans l'exemple précédent, si elle était payable tous les mois?*

Ici l'annuité se paye six fois plus souvent que l'intérêt; l'annuité est donc moindre que dans le cas précédent, et il faut retrancher du logarithme de l'annuité le logarithme P_6.

$$\log \alpha = 2,47465$$
$$-P_6 = \quad -314$$
$$\log \alpha' = 2,47151$$
$$\alpha' = 296^{fr},15$$

par semestre ou $49^{fr},36$ par mois.

Exemple CXVI. — *Valeur actuelle d'une réversion de* 79000^{fr} *par an, d'une durée de* 33 *ans, payable par trimestre et dont le premier payement doit avoir lieu dans* 5 *ans, le taux d'intérêt payable annuellement étant de* 5 $\frac{1}{2}$ *pour* 100.

$$\log 79000 = 4,8976271$$
$$\log \varphi_{(33)} = 1,1782593$$
$$\text{Ct} \log r^{1} = 9,9069902$$
$$\text{Ct} \log r^{\frac{3}{4}} = 9,9825607$$
$$P_4 = \quad 87683$$
$$D = 5,9742056$$

D = 942335,70, valeur cherchée.

CALCUL DU TAUX DES RÉVERSIONS.

§ LIX. — Évaluation du taux au moyen de l'interpolation.

Il est toujours très-facile, à l'aide de nos Tables, de trouver le taux avec une très-grande approximation. On n'a qu'à calculer le prix d'achat pour deux taux entre lesquels est compris le taux en question, et l'on trouve alors ce dernier au moyen de l'interpolation. Le logarithme de l'annuité est suffisant; il n'est pas nécessaire d'en chercher la valeur numérique.

Si l'on a recours à l'interpolation simple du premier degré, le taux est trop grand, mais d'une assez faible quantité.

Exemple CXVII. — *Une annuité de* 2500^{fr}, *d'une durée de* 37 *ans et différée de* 6 *ans, est achetée au prix de* 37000^{fr}. *Quel est le taux de l'intérêt produit par le prix d'achat?*

$$\log 37000 = \frac{2500 . \varphi_{(37)}}{r^6}.$$

A 4 pour 100 :

$$\begin{aligned} \log 2500 &= 3,39794 \\ \log \varphi &= 1,28200 \\ \text{Ct} \log r^6 &= 9,89780 \\ \hline &= 4,57774 \end{aligned}$$

A 4 $\frac{1}{8}$ pour 100 :

$$\begin{aligned} \log 2500 &= 3,39794 \\ \log \varphi &= 1,27438 \\ \text{Ct} \log r^6 &= 9,89467 \\ \hline &= 4,56699 \end{aligned}$$

La différence pour $\frac{1}{8} = 1075$; mais

$$\log 37000 = 4,56820;$$

la différence avec le 4 pour 100 est de 954; par conséquent le taux obtenu est

$$4 + \frac{954}{1075} \times \frac{1}{8} = 4,1109 \text{ pour } 100.$$

L'erreur est inférieure à $\frac{1}{10000}$ pour 100.

Exemple CXVIII. — *Si l'on paye* 202470^{fr},80 *pour une annuité de* 18700^{fr}, *payable par semestre pendant* 23 *ans et différée de* 6 *ans* 5 *mois, quel est le taux d'intérêt, celui-ci étant convertible une fois par an seulement?*

$$202470,80 = \frac{18700.\varphi_{(23)}.P_2}{r^{\left(6+\frac{5}{12}\right)}}.$$

A $4\frac{3}{8}$ pour 100 :

$$\begin{aligned} \log 18700 &= 4,27184 \\ \log \varphi_{(23)} &= 1,15595 \\ \text{Ct} \log r^6 &= 9,88842 \\ \text{Ct} \log r^{\frac{5}{12}} &= 9,99225 \\ \log P_2 &= 467 \\ \hline & \ 5,31313 \end{aligned}$$

A $4\frac{1}{2}$ pour 100 :

$$\begin{aligned} \log 18700 &= 4,27184 \\ \log \varphi &= 1,15069 \\ \text{Ct} \log r^6 &= 9,88530 \\ \text{Ct} \log r^{\frac{5}{12}} &= 9,99203 \\ P_2 &= 481 \\ \hline & \ 5,30467 \end{aligned}$$

La différence pour $\frac{1}{8}$ pour 100 est égale à 846. Mais

$$\log 202470,80 = 5,30636;$$

la différence avec le $4\frac{3}{8} = 667$. Le taux est donc

$$4\tfrac{3}{8} + \frac{667}{846}.\frac{1}{8} = 4,47503 \text{ pour } 100.$$

L'erreur est inférieure à $\frac{1}{30000}$ pour 100.

§ LX. — Formules générales pour trouver le taux des réversions.

Si, dans la formule (20), nous développons, au moyen du théorème du binôme, les deux puissances en deux suites de termes ordonnés d'après les puissances croissantes de t, nous

aurons

$$r^{-d}=(1+t)^{-d}=1-dt+d.(d+1)\frac{t^2}{2}-d.(d+1)(d+2)\frac{t^3}{2.3}+\ldots,$$

$$r^{-(d+n)}=1-(d+n)t+(d+n)(d+n+1)\frac{t^2}{2}$$
$$-(d+n)(d+n+1)(d+n+2)\frac{t^3}{6}\cdots$$

et, en soustrayant,

$$\frac{Dt}{\alpha}=nt-(2d+n+1)\frac{nt^2}{2}+(3d^2+3dn+n^2+6d+3n+2)\frac{nt^3}{6},$$

ou, en divisant par nt,

$$\frac{D}{\alpha n}=1-(2d+n+1)\frac{t}{2}+(3d^2+3dn+n^2+6d+3n+2)\frac{t^2}{6}.$$

Si nous élevons maintenant les deux membres de cette équation à la puissance $-\frac{2}{2d+n+1}$, nous obtiendrons, au moyen du binôme,

$$\left(\frac{D}{\alpha n}\right)^{-\frac{2}{2d+n+1}}=1+t-\frac{n^2-1}{12(2d+n+1)}\cdot t^2,$$

et, en supposant

$$q=\left(\frac{\alpha n}{D}\right)^{\frac{2}{2d+n+1}}-1,$$

nous obtenons

$$q=t-\frac{n^2-1}{12(2d+n+1)}\cdot t^2,$$

équation du second degré, dont la racine approchée sera, d'après la note de la page 79,

$$(22)\qquad t=\frac{12(2d+n+1)-q(n^2-1)}{12(2d+n+1)-2q(n^2-1)}\cdot q.$$

Exemple CXIX. — *On demande de déterminer à quel taux d'intérêt une annuité de* 4000^{fr}, *d'une durée de* 25 *ans, différée de* 5 *ans, serait achetée au prix de* 44171^{fr},90.

Ici,

$$\alpha = 4000, \quad d = 5, \quad n = 25, \quad n^2 - 1 = 624,$$
$$\alpha n = 100000, \quad 2d + n + 1 = 36.$$

$$\begin{aligned} \log \alpha n &= 5, \\ \log D &= \underline{4,6451461} \\ \log \frac{\alpha n}{D} &= 0,3548539 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt[18]{\ } &= 0,0197141 \\ q &= 0,046439 \\ \log q &= 8,66689 \\ \log 624 &= \underline{2,79518} \\ & \quad 1,46207 \end{aligned}$$

$$624q = 28,978,$$

$$12(2d + n + 1) = 432, \quad 2q.624 = 57,956,$$
$$t = \frac{432 - 28,978}{432 - 57,956} \cdot q = \frac{403,022}{374,044} \cdot q.$$

$$\begin{aligned} \log q &= 8,66689 \\ \log 403,022 &= 2,60533 \\ \text{Ct} \log 374,044 &= \underline{7,42708} \\ & \quad 8,69930 \end{aligned}$$

$t = 5,0038$ pour 100 (taux vrai 5 pour 100).

§ LXI. — Formule corrective.

Toutes les fois qu'au moyen de nos Tables ou de la dernière formule on a obtenu une valeur approchée, on peut se servir de cette dernière valeur pour déterminer le taux avec toute l'exactitude désirable.

Représentons par τ cette valeur approchée du taux *vrai* t et posons

$$t = \tau + x, \quad \rho = 1 + \tau \quad \text{et} \quad r = \rho + x;$$

l'équation (20) devient alors

$$\frac{D}{\alpha}(\tau + x) = (\rho + x)^{-d} - (\rho + x)^{-(d+n)}.$$

Si nous développons maintenant, au moyen du théorème du binôme, les puissances de $(\rho + x)$, en négligeant les termes dans lesquels entrent les puissances secondes, troisièmes, etc., de x, comme de nulle valeur en comparaison des autres, nous avons

$$\frac{D}{\alpha}(\tau + x) = \rho^{-d} - dx\rho^{-(d+1)} - \rho^{-(d+n)} + (d+n)x\rho^{-(d+n+1)};$$

d'où

$$(23) \qquad x = \frac{\rho^{-d} - \rho^{-(d+n)} - \frac{D\tau}{\alpha}}{\frac{D}{\alpha} + d\rho^{-(d+1)} - (d+n)\rho^{-(d+n+1)}}.$$

Dans l'exemple CXVII, nous avons trouvé, pour valeur approchée du taux, $4\frac{1}{6}$; par conséquent nous avons, d'après la dernière formule,

$$\begin{aligned}
\log\rho &= 0,0174970814 \\
\rho^{-6} &= 0,7852673 \\
-\rho^{-43} &= -0,1768583 \\
-\frac{D\tau}{\alpha} &= -0,6084444 \\
\text{le numérateur} &= -0,0000354
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\alpha} &= 14,8 \\
6\rho^{-7} &= 4,52555 \\
-43\rho^{-44} &= -7,30461 \\
\text{le dénominateur} &= 12,02094
\end{aligned}$$

$$x = -\frac{0,0000354}{12,021}$$

$$x = -0,000002945$$

$$i = 0,041108166, \text{ valeur vraie.}$$

§ LXII. — Annuités perpétuelles différées.

Lorsque l'annuité différée est une *annuité perpétuelle*, n est infini et l'équation générale (20) devient

$$D = \frac{\alpha}{ir^d};$$

d'où nous déduisons les formules suivantes :

$$\alpha = \mathrm{D}\,t r^d, \quad r^d = \frac{\alpha}{\mathrm{D}t}.$$

Exemple CXX. — *Chercher la valeur actuelle de l'annuité perpétuelle de* 41 800^{fr} *par an, différée de* 6 *ans* 5 *mois, à* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100, *l'intérêt et l'annuité étant payables par semestre.*

Le taux vrai est de $1\frac{3}{4}$ pour 100 par semestre; chaque payement semestriel est de 20900^{fr}; par conséquent,

$$\begin{aligned}
\log\alpha &= 4,3201463\\
-\log t = -\log\frac{1}{\varphi} &= -\log a = -8,2430380\\
\text{(Tab. 51)}\quad -\log r^{12} &= -0,0904130\\
\text{(Tab. 53)}\quad -\log r^{\frac{19}{12}} &= -0,0062787\\
\log\mathrm{D} &= 5,9804166
\end{aligned}$$

$$\mathrm{D} = 955909^{\text{fr}},10.$$

Exemple CXXI. — *Une personne achète au prix de* 50000^{fr} *un simple fief réversible dans* 3 *ans* 8 *mois; quelle rente trimestrielle doit-il produire pour rapporter à l'acheteur* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100 *de son argent?*

$$\alpha = \frac{\mathrm{D}\,t r^d}{\mathrm{P}_4}.$$

$$\begin{aligned}
\log\mathrm{D} &= 4,69897\\
\log t &= 8,65321\\
\log r^3 &= 0,05735\\
\text{(Tab. 52)}\quad \log r^{\frac{8}{12}} &= 0,01274\\
\log\mathrm{P}_4 &= -\ 720\\
\log\alpha &= 3,41507
\end{aligned}$$

$$\alpha = 2600^{\text{fr}},60,$$

par an ou 650^{fr},15 par trimestre.

Exemple CXXII. — *On cède, pour éteindre une dette de* 22000^{fr}, *la réversion d'une propriété produisant* 100^{fr} *par mois;*

dans combien de temps le créancier doit-il en prendre possession, s'il lui est alloué $5\frac{1}{2}$ *pour* 100 *d'intérêt par an pour l'argent qui lui est dû?*

$$r^d = \frac{\alpha . P_{12}}{Dt}, \quad d = \frac{\log \alpha - \log Dt + \log P_{12}}{\log r}.$$

$$\begin{aligned} \log \alpha &= 3,07918 \\ \mathrm{Ct}\log D &= 5,65758 \\ \text{(Tab. 33)}\quad \mathrm{Ct}\log t = \mathrm{Ct}\log a &= 1,27984 \\ \text{(Tab. 63)}\quad \log P_{12} &= 0,01023 \\ \hline & \ 0,02683 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log &= 8,42862 \\ \log^2 r &= 8,34679 \\ \hline \log d &= 0,08183 \end{aligned}$$

$$d = 1^{\text{an}},2073 \quad \text{ou} \quad 1^{\text{an}}75\tfrac{1}{2}\ ^{\text{jours}}.$$

Exemple CXXIII. — *Une rente perpétuelle, constituée sur une propriété dont le* revenu net *est de* 5400^{fr} *par an, doit être divisée par réversion en trois parties égales; pendant combien de temps les partageants prendront-ils part à la rente, l'intérêt étant de* 4 *pour* 100 *par an?*

Ici

$$\alpha = 5400^{\text{fr}}, \quad t = 0,04$$

Valeur de l'annuité perpétuelle.....	135000^{fr}
Valeur de chaque portion.....	45000

Si maintenant nous supposons que le premier partageant jouisse de la rente pendant d années, la cède ensuite au second pour n années et celui-ci au troisième à *perpétuité*, nous aurons :

$$45000 = \frac{5400}{t}(1 - r^{-d}) \quad \text{et} \quad 45000 = \frac{5400}{tr^d}(1 - r^{-n}),$$

d'où

$$r^d = 1\tfrac{1}{2}, \quad r^n = 2, \quad d = \frac{\log 1\frac{1}{2}}{\log r}, \quad n = \frac{\log 2}{\log r}.$$

$$\log 1\tfrac{1}{2} = 0,17609$$
$$\log^2 1\tfrac{1}{2} = 9,24573$$
$$\log^2 r = 8,23130$$
$$\log d = 1,01443$$

$$d = 10^{\text{ans}},338.$$

$$\log 2 = 0,30103$$
$$\log^2 2 = 9,47861$$
$$\log^2 r = 8,23130$$
$$\log n = 1,24731$$

$$n = 17^{\text{ans}},673.$$

Le premier jouira donc de la rente pendant $10^{\text{ans}}123^{\text{jours}}$; après cet espace de temps, le second en jouira pendant 17^{ans} 246^{jours}, après lesquels, c'est-à-dire dans $28^{\text{ans}}4^{\text{jours}}$, le troisième en jouira à perpétuité.

Exemple CXXIV. — *On a payé* $556543^{\text{fr}},75$ *pour la réversion d'une annuité perpétuelle de* 34700^{fr}, *différée de* 7 *ans; quel intérêt l'acheteur retire-t-il de son argent?*

Valeur actuelle à $4\frac{1}{2}$.

$$\log \alpha = 4,54033$$
$$-\log t = -8,65321$$
$$-\log r^d = -0,13381$$
$$5,75331$$

$$566630^{\text{fr}}.$$

Valeur actuelle à $4\frac{3}{4}$.

$$\log \alpha = 4,54033$$
$$-\log t = -8,66511$$
$$-\log r^d = -0,13745$$
$$5,73777$$

$$546720^{\text{fr}}.$$

La différence pour $\frac{1}{8}$ pour 100 est égale à 199,1.

Par conséquent

$$i = 4\tfrac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{100,9}{199,1} = 4\tfrac{7}{10} \text{ pour } 100.$$

L'interpolation au moyen des parties proportionnelles donne toujours un taux un peu trop élevé; pour l'obtenir avec la plus grande exactitude, il faut se servir de la formule (p. 39) servant à l'interpolation du second degré; on peut d'ailleurs appliquer la formule corrective du § LXI pour les annuités en réversions.

Comme, dans ce cas, la réversion est une annuité perpétuelle, n devient infini, et la formule générale devient

$$x = \frac{\rho^{-d} - \frac{D\tau}{\alpha}}{\frac{D}{\alpha} + d\rho^{-(d+1)}}.$$

§ LXIII. — Renouvellement des baux.

Le renouvellement des baux n'est qu'un cas particulier des rentes différées. La question principale consiste à déterminer la somme (*fine*) qui doit être donnée pour le renouvellement d'un certain nombre d'années déjà écoulées dans un bail.

Le nombre d'années pour lesquelles les établissements, les compagnies et les corporations particulières concèdent leurs baux, est le plus ordinairement de 10, 20, 21, 40 et 50 ans.

La question revient donc à déterminer la valeur actuelle d'une annuité différée jusqu'au terme d'expiration du bail et dont la durée, à partir de ce temps, est égale au temps déjà écoulé.

Exemple CXXV. — *Un fermier veut ajouter à la durée d'un bail de* 21 *ans les* 9 *ans déjà passés dans ce bail; chercher la somme qu'il doit donner, en supposant que le revenu net de la propriété est de* 3100^{fr}, *déduction faite de la rente réservée et de*

toutes taxes et autres charges annuelles, l'intérêt étant de 4 *pour* 100.

$$D = \frac{\alpha\varphi}{r^d}, \quad \alpha = 3100, \quad \varphi = \varphi_{(9)}, \quad d = 12.$$

$$\begin{aligned} \log\alpha &= 3,49136 \\ \text{(Tab. 23)}\ \log\varphi &= 0,87130 \\ \text{Ct}\log r^{12} &= 9,79560 \\ \hline \log D &= 4,13826 \end{aligned}$$

$$D = 14393,75.$$

Exemple CXXVI. — *Un fermier a la jouissance d'une propriété pour* 40 *ans, dont* 17 *sont écoulés; combien doit-il payer pour le renouvellement de son bail, le rapport annuel de la propriété, toutes déductions faites, étant de* 3200^{fr}, *et le taux d'intérêt, payable par semestre, étant de* 5 $\frac{1}{2}$ *pour* 100 *par an?*

$$\begin{aligned} \log 1600 &= 3,2041200 \\ \log\varphi_{(34)} &= 8,6594289 \\ -\log r^{16} &= 0,5419642 \\ -Q_2 &\quad -0,0029756 \\ \hline \log D &= 3,9997513 \end{aligned}$$

$$D = 9994,275.$$

Exemple CXXVII. — *On a payé* 22500^{fr} *un bail de* 33 *ans produisant annuellement* 1180^{fr}; *quelle somme faut-il payer aux mêmes conditions pour renouveler les* 14 *ans expirés?*

Ce problème exige deux calculs : le premier pour obtenir le taux du bail, le deuxième pour obtenir la valeur actuelle du bail pour les 14 ans surajoutés.

$$\begin{aligned} \log 1180 &= 3,07188 \\ \log 22500 &= 4,35218 \\ \hline \log a &= 8,71970 \end{aligned}$$

Il se trouve que ce logarithme, pour $n = 33$, correspond,

dans nos Tables, exactement au taux de $3\frac{5}{8}$ pour 100; par conséquent,

$$\begin{aligned} \log\alpha &= 3,07188 \\ \log\varphi &= -8,96539 \\ -\log r^{19} &= -0,29383 \\ \hline \log D &= 3,81266 \end{aligned}$$

$D = 6496^{fr},20$ (somme cherchée).

CINQUIÈME PARTIE.

ANNUITÉS AVEC ENTRÉE.

On peut représenter toutes les annuités avec entrée par Vr^t, V exprimant la valeur actuelle de la même annuité supposée immédiate, et r^n le montant de 1fr à partir de l'époque de l'entrée.

Ces annuités peuvent être divisées en trois classes distinctes :

1° *Montant des annuités arriérées*, ou montant des annuités qui, quoique payables ou ayant leurs termes d'échéance à la fin de chaque année, restent sans être payées pendant un nombre quelconque d'années et fructifient annuellement à intérêts composés ;

2° Montant des placements annuels faits *au commencement* de chaque année ;

3° Valeur des annuités à *dividende croissant*.

Montant des annuités arriérées.

§ LXIV.

Pour trouver le montant d'une annuité placée à la fin de chaque année et augmentée de ses intérêts composés, on n'a qu'à déterminer le montant de l'annuité de chaque année, en supposant que chacune a fructifié à intérêts composés depuis le terme de son échéance.

Soient donc

α l'annuité ou rente annuelle;
n le nombre d'années ou le nombre d'annuités;
S le montant des annuités.

Le premier payement de α^{fr} ayant dû avoir lieu $(n-1)$, le second $(n-2)$, le troisième $(n-3)$ années auparavant, et ainsi de suite, le montant de ces payements sera :

Pour le premier.....	αr^{n-1}
Pour le deuxième.....	αr^{n-2}
Pour le troisième.....	αr^{n-3}

et ainsi de suite jusqu'au dernier ou $n^{ième}$, dont le montant sera α^{fr}, puisqu'il est à son terme d'échéance. La somme de toutes ces valeurs pour n années sera le montant de l'annuité pendant n années ou

$$S = \alpha r^{n-1} + \alpha r^{n-2} + \alpha r^{n-3} + \ldots + \alpha;$$

d'où

$$rS = \alpha r^{n} + \alpha r^{n-1} + \alpha r^{n-2} + \ldots + \alpha r.$$

En retranchant la première équation de la seconde, on a

$$rS - S, \quad \text{ou} \quad S(r-1), \quad \text{ou} \quad tS = \alpha r^{n} - \alpha;$$

d'où

$$S = \frac{\alpha}{t}(r^{n} - 1) \tag{24}$$

et

$$r^{n} = 1 + \frac{tS}{\alpha}. \tag{25}$$

La formule (24) peut aussi s'écrire comme il suit :

$$S = \frac{\alpha r^{n}}{t}\left(\frac{r^{n}-1}{r^{n}}\right) = \frac{\alpha r^{n}}{t}(1 - r^{-n}),$$

et, si l'on exprime par φ la valeur actuelle de n annuités de 1^{fr} (p. 30)

$$\varphi = \frac{1}{t}(1 - r^{-n}),$$

la formule ci-dessus deviendra

$$S = \alpha r^{n} \varphi, \tag{26}$$

montant de n annuités de a^{fr} placées à la fin de chaque année.

Si l'on désigne par S′ la somme de $(n+1)$ annuités arriérées, on obtient

$$S' = \frac{\alpha}{i}(r^{n+1} - 1) = \frac{\alpha r^{n+1}}{i} - \frac{\alpha}{i}.$$

Mais

$$S = \frac{\alpha}{i}(r^n - 1) = \frac{\alpha r^n}{i} - \frac{\alpha}{i},$$

par conséquent

$$rS = \frac{\alpha r^{n+1}}{i} - \frac{\alpha r}{i};$$

on a donc

$$S' - rS = \frac{\alpha r}{i} - \frac{\alpha}{i} = \frac{\alpha}{i}(r - 1) = \alpha \quad \text{et} \quad S' = rS + \alpha,$$

c'est-à-dire que le montant de $(n+1)$ annuités arriérées est égal au montant de n annuités arriérées, augmenté de l'intérêt de ce montant pour un an et d'une annuité.

§ LXV.

Il serait inutile de répéter les calculs qui ont été l'objet du § XXXVII, dans les cas où l'intérêt et l'annuité sont payables plusieurs fois par an.

Si l'annuité et l'intérêt sont payables *tous les* 6 *mois*, prenez la moitié de l'annuité et du taux, et doublez le nombre des payements.

D'une manière générale, quand tous deux sont payables aux mêmes termes, ν fois par an et à ν intervalles égaux, divisez l'annuité et le taux par le nombre ν, et multipliez par ν le nombre des payements. Le montant augmente à mesure que le nombre des payements annuels augmente, et il atteint son *maximum* lorsque ν est infini, c'est-à-dire lorsqu'on suppose que les payements de l'annuité et de l'intérêt doivent être continus.

Ainsi, par exemple, nous avons pour le montant de 1^{fr} par an, pendant 25 ans, et à 5 pour 100, lorsque l'annuité

et l'intérêt sont payables.

Annuellement.....	47,72919
Tous les six mois..	48,74217
Tous les trois mois..... ..	49,26809
Tous les mois..... .	49,62580
D'une manière continue.....	49,80686

Enfin, lorsque les termes pour les payements de l'annuité et de l'intérêt ne coïncident pas, on doit se servir des indications données relativement aux annuités immédiates.

Si l'annuité se paye *plus souvent* que l'intérêt, calculez d'abord le montant de l'annuité, en supposant l'annuité payable aux mêmes époques que l'intérêt, multipliez ensuite le résultat par le facteur constant P.

$$S = \alpha r^n \varphi P.$$

Si, au contraire, l'annuité se paye *moins souvent* que l'intérêt, divisez le montant qui correspond au cas de l'annuité concordant avec l'intérêt par le rapport constant Q.

$$S = \frac{\alpha r^n \varphi}{Q}.$$

Exemple CXXVIII. — *On met de côté, pendant* 82 *ans, une rente annuelle de* 1000000^{fr} ; *à quelle somme s'élèvera cette rente au taux de* $5\frac{1}{2}$ *pour* 100 *par an?*

Ici,

$$\alpha = 1000000, \quad t = 5\tfrac{1}{2}, \quad n = 82, \quad r = 1,055.$$

$$\log r = 0,023252459633711 5$$
$$\log r^{82} = 1,906701689964 34$$
$$r^{82} = 80,668074361 48$$
$$\frac{r^{82} - 1}{0,055} = 1448,510442936$$
$$S = 14485104 42^{fr},936.$$

Exemple CXXIX. — *A quelle somme une rente semestrielle de* 2590^{fr} *s'élèvera-t-elle en* 37 *ans, placée à intérêts composés,*

à la fin de chaque semestre, le taux étant de $4\frac{1}{2}$ *pour* 100 *payables* par semestre?

$$\log 2590 = 3,4132998$$
$$\text{(Tab. 9)}\quad \log q = 1,5548446$$
$$\log r^{24} = 0,7150854$$
$$\log S = 5,6832298$$
$$S = 482202^{fr},90.$$

Exemple CXXX. — *Calculer le montant d'une rente annuelle de* 1800^{fr}, *pendant* 50 *ans; la rente se paye tous les* six mois, *et l'intérêt, convertible* par semestre, *est de* 5 *pour* 100.

$$\log \alpha = 2,9542425$$
$$\log q = 1,5636484$$
$$\log r^{100} = 1,0723865$$
$$\log S = 5,5902774$$
$$S = 389293^{fr},70.$$

Quel serait le montant de la même annuité payable par trimestre?

$$5,5902774$$
$$\text{(Tab. 63)}\quad P_2 = \quad 26892$$
$$\log S = 5,5929666$$
$$S = 391711^{fr},70, \text{ montant cherché.}$$

Exemple CXXXI. — *A quelle somme une annuité de* 5400^{fr}, *mise de côté pendant* 23 *ans, s'élèverait-elle, lorsqu'on la reçoit tous les mois et qu'on la place à intérêts composés par portions égales de* 450^{fr}, *l'intérêt, convertible en capital deux fois par an, étant de* $3\frac{1}{4}$ *pour* 100?

$$\log \alpha = 3,4313638$$
$$\text{(Tab. 6)}\quad \log q = 1,4862963$$
$$\log r^{n} = 0,3711106$$
$$\text{(Tab. 63)}\quad P_6 = 0,0033676$$
$$\log S = 5,2921383$$
$$S = 195946^{fr},85.$$

Balance entre les montants d'un capital et d'une annuité.

Exemple CXXXII. — 300000^{fr} *sont placés à* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100 *par an: à la fin de chaque année, on en tire* 15000^{fr}; *combien restera-t-il du capital après* 21 *ans?*

Montant du capital.

$$\log 300000 = 5,4771213$$
$$\log r^{21} = 0,2806432$$
$$\log M = 5,7577645$$
$$M = 572485^{fr},40.$$

Montant de l'annuité.

$$\log 15000 = 4,1760913$$
$$\log r^{21} = 0,2806432$$
$$\log \varphi = 1,1827288$$
$$\log S = 5,6394633$$
$$S = 435976^{fr},70.$$

Différence..... 136508^{fr},70.

Si nous appelons C le capital, α l'annuité et x la différence entre les deux montants, nous avons [formule (24)]

$$x = Cr^n - \frac{\alpha}{i}(r^n - 1),$$

ou

$$x = \frac{\alpha}{i} + r^n\left(C - \frac{\alpha}{i}\right):$$

par conséquent,

$$x = 480000 + (300000 - 480000).r^n$$
$$= 480000 - 180000.r^n = 480000 - 343491,3.$$
$$x = 136508^{fr},70,$$

comme ci-dessus.

Exemple CXXXIII. — *De* 7300^{fr}, *placés à intérêts composés,*

à $4\frac{1}{4}$ pour 100 par an, on retire chaque année 200^{fr}. Que restera-t-il du capital au bout de 35 ans, l'intérêt et l'annuité étant payables tous les six mois?

Montant du capital.

3,8633229
0,6392449
4,5025678

31800^{fr},30.

Montant de l'annuité.

0,6392449
3,4405781
4,1986668

15800^{fr},35.

Reste du capital.... 16009^{fr},95.

Exemple CXXXIV. — 15000^{fr} *sont placés à intérêts composés à 4 pour 100 par an; à la fin de chaque année on y ajoute 400^{fr}, qui fructifient aussi au même taux; quel sera le montant total au bout de 22 ans?*

Montant du capital.

4,1760913
0,3517383
4,5278296

M = 33715^{fr},50.

Montant de l'annuité.

2,6020600
0,3517383
1,1703405
4,1241388

S = 13308^{fr},80;

par conséquent, 47024^{fr},30 est le total demandé.

Calcul de la rente annuelle et du temps.

Exemple CXXXV. — *Quelle est la rente annuelle qui, au taux de* $5\frac{1}{4}$ *pour* 100, *s'élèvera dans* 28 *ans à* 360000^{fr}?

$$S = \alpha r^n \varphi,$$

d'où

$$\alpha = \frac{S}{r^n \varphi} = \frac{S\alpha}{r^n}.$$

$$\begin{aligned} \log S &= 5,55630 \\ \log \alpha &= 8,83858 \\ \text{Ct} \log r^n &= 9,37778 \\ \hline \log \alpha &\quad 3,77266 \end{aligned}$$

$\alpha = 5924^{fr},60$ (rente annuelle).

Exemple CXXXVI. — *Combien faut-il placer à la fin de chaque trimestre pour obtenir* 75000^{fr} *dans* 24 *ans, le taux étant de* $4\frac{3}{4}$ *pour* 100, *convertible tous les six mois?*

$$\begin{aligned} \log S &= 4,87506 \\ \text{(Tab. 10)} \quad \log \alpha &= 8,54578 \\ \text{Ct} \log r^{48} &= 9,51069 \\ P_2 &= - \quad 256 \\ \hline \log \alpha &= 2,92898 \end{aligned}$$

$\alpha = 849^{fr},15$ par semestre, ou $1698^{fr},30$ par an.

Exemple CXXXVII. — *Dans combien d'années une annuité de* 3120^{fr} *s'élèvera-t-elle à* 200000^{fr}, *au taux de* $3\frac{3}{4}$ *pour* 100?

Ici nous nous servons de la formule (25) $r^n = 1 + \frac{tS}{\alpha}$.

$$r^n = 1 + \frac{3\frac{3}{4} . 200000}{100 . 3120} = \frac{531}{156}$$

$$\begin{aligned} \log 531 &= 2,72509 \\ \log 156 &= 2,19312 \\ \hline \log r^n &= 0,53197 \end{aligned}$$

$$n = \frac{0,53197}{\log r}.$$

$$\begin{aligned} \log 0,53197 &= 9,72589 \\ \log^2 r &= 8,20380 \\ \hline \log n &= 1,52209 \end{aligned}$$

$$n = 33^{\text{ans}},273 \quad \text{ou} \quad 33^{\text{ans}}\,100^{\text{jours}}.$$

Exemple CXXXVIII. — *Une annuité de* 2250^{fr} *par an, payable tous les trois mois, s'élève à* 100000^{fr}, *à* $4\frac{1}{4}$ *pour* 100 *par an. Quel est le nombre d'années de l'annuité?*

Ici nous pouvons employer la formule (26)

$$S = \alpha r^n \rho P = \frac{\alpha P}{t}(r^n - 1);$$

d'où

$$r^n = 1 + \frac{tS}{\alpha P}, \quad \frac{St}{\alpha} = \frac{17}{9},$$

$$\begin{aligned} \log \frac{St}{\alpha} &= 0,27621 \\ P_4 &= 681 \\ \log \frac{St}{\alpha P} &= 0,26940 \\ \frac{St}{\alpha P} &= 1,8595 \\ r^n &= 2,8595 \\ n &= \frac{\log 2,8595}{\log r} \\ \log 2,8595 &= 0,45629 \\ \log^2 &= 9,65924 \\ \log^2 r &= 8\ 25710 \\ \hline \log n &= 1,40214 \end{aligned}$$

$$n = 25^{\text{ans}},243 \quad \text{ou} \quad n = 25^{\text{ans}}\,89^{\text{jours}}.$$

§ LXVI. — Montant des annuités augmentant ou diminuant en progression arithmétique.

Soient α l'annuité placée à l'expiration de la première année, et d l'accroissement annuel de cette annuité; le mon-

tant sera

$$S = \alpha r^{n-1} (\alpha + d) r^{n+2} + \ldots + \alpha + (n-1) d$$
$$= r^n \left[\frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha + d}{r^2} + \frac{\alpha + 2d}{r^3} + \ldots + \frac{\alpha + (n-1) d}{r^n} \right].$$

Mais nous avons déjà trouvé [formule (19)] que cette dernière suite de termes est égale à $\left(\alpha + nd + \frac{d}{t}\right)\varphi - \frac{nd}{t}$; par conséquent,

$$S = \left(\alpha + nd + \frac{d}{t}\right) r^n \varphi - \frac{ndr^n}{t};$$

et, comme $r^n \varphi = \frac{1}{t}(r^n - 1)$,

$$S = \frac{r^n}{t}\left(\alpha + \frac{d}{t}\right) - \frac{1}{t}\left(\alpha + nd + \frac{d}{t}\right).$$

Si l'annuité va en diminuant, le signe de d demande à être changé dans cette dernière équation.

Exemple CXXXIX. — *Déterminons le montant de* 21 *annuités, placées à* 4 *pour* 100 *par an, à la fin de chaque année, dont la première est de* 360^{fr}; *l'annuité augmente de* 1^{fr} *chaque année.*

Ici

$$\alpha = 360, \quad d = 1, \quad n = 21, \quad t = 0{,}04, \quad S = 15250 r^{21} - 20500.$$

$$\begin{aligned} \log 15250 &= 4{,}1832968 \\ \log r^{21} &= 0{,}3577001 \\ \hline & 4{,}5477001 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{fr} \\ & 34751{,}21 \\ & 20500 \\ \hline S &= 14251{,}21 \end{aligned}$$

montant de l'annuité.

§ LXVII. — Taux d'intérêt.

On trouve le taux par l'interpolation de nos Tables de logarithmes qui donnent une exactitude plus que suffisante

dans les cas les plus pratiques; on pourra faire usage aussi de la formule que nous établissons plus bas.

Exemple CXL. — *On a reçu* 710443^{fr},60 *pour* 27 *annuités de* 15 000^{fr}, *payables à la fin de chaque année. Quel est le taux?*

Ici nous pouvons nous servir de la formule $\frac{S}{\alpha} = r^n \varphi$.

$$\begin{aligned} \log S &= 5,85153 \\ \log \alpha &= 4,17609 \\ \hline \log r^n \varphi &= 1,67544 \end{aligned}$$

Mais $\log r^n \varphi$ devient

A 4 pour 100.	A $4\frac{1}{2}$ pour 100.
$\log r^n = 0,45990$	$\log r^n = 0,47398$
$\log \varphi = 1,21298$	$\log \varphi = 1,20692$
1,67288	1,68090

Différence..... 802

La différence entre le 4 pour 100 et le logarithme obtenu est égale à 256; le taux est donc

$$4 + \frac{1}{8} \cdot \frac{256}{802} = 4^{fr},0399 \text{ pour 100 par an.}$$

Le taux ainsi obtenu par simple interpolation est toujours un peu trop faible; ainsi, dans l'exemple précédent, sa valeur vraie est de 4,04 pour 100. Mais 4,04 pour 100 correspond exactement à 2 pour 100 par semestre ou à 4 pour 100 par an, l'intérêt étant convertible tous les six mois.

§ LXVIII. — Formule générale pour trouver le taux d'une annuité arriérée.

Puisque la valeur des annuités différées, $D = \alpha\varphi r^{-d}$, devient égale au montant de l'annuité arriérée, lorsqu'on met n à la place de $(-d)$, nous n'avons, dans toutes les formules concernant les annuités différées, qu'à convertir $(-d)$ en n pour obtenir directement les formules analogues applicables aux annuités arriérées.

Ainsi, dans la formule (22), $(2d+n+1)$ devient $1-n$, et l'on obtient directement comme formule déterminant le taux approximativement, q étant égal à $\left(\frac{S}{\alpha n}\right)^{\frac{1}{n-1}}-1$,

$$t=\frac{12+q(n+1)}{12+2q(n+1)}q.$$

Exemple CXLI. — *A quel taux une annuité de* 15000^{fr}, *épargnée pendant* 27 *ans, s'élèverait-elle à* 710443^{fr},60?

Ici

$$S=710443{,}60,\quad \alpha=15000,\quad n=27,$$
$$\frac{2}{n-1}=\frac{1}{13}\quad\text{et}\quad\frac{n+1}{12}=\frac{7}{3}.$$

$$\begin{aligned}
\log S &= 5{,}8515296\\
\text{Ct}\log\alpha &= 5{,}8239087\\
\text{Ct}\log n &= 8{,}5686362\\
\hline
\log\frac{S}{\alpha n} &= 0{,}2440745
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{13}\log\left(\frac{S}{\alpha n}\right) &= 0{,}01877496\\
1+q &= 1{,}0441790\\
q &= 0{,}044179
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t=q\cdot\frac{1{,}103084}{1{,}206169}&\\
&64522\\
&04261\\
&91859\\
\hline
\log t &= 60642\\
t &= 0{,}040404.
\end{aligned}$$

le taux vrai est égal à 4,04 pour 100 par an ou 2 pour 100 par semestre.

Formule corrective. — La formule corrective pour les annuités arriérées s'obtient de la même manière, en convertissant dans la formule (23) $(-d)$ en n.

Ainsi

$$d + n = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{\rho^n - 1 - \frac{S\tau}{\alpha}}{\frac{S}{\alpha} - n\rho^{n-1}}.$$

Dans l'exemple (CXL), nous avons trouvé

$$\tau = 0,040399, \quad \rho = 1,040399;$$

d'où

$$\log \rho = 0,01719.992609$$
$$\log \rho^{27} = 0,46439.80044$$
$$\rho^{27} = 2,91338.585$$

$$x = \frac{2,91338585 - 2,91341407}{47,363 - 75,607} = \frac{0,00002824}{28,244} = 0,000001;$$

et la valeur corrigée du taux est $t = 4,04$ pour 100.

Montant des placements annuels.

§ LXIX.

Les *placements annuels* sont essentiellement distincts des annuités arriérées, celles-ci étant placées à la fin de chaque année, tandis que les premiers sont placés au commencement de chaque année comme un simple capital.

Le *montant d'une annuité arriérée* procède d'une rente annuelle, placée à mesure qu'elle devient payable et fructifiant à intérêts composés; le *montant d'un placement annuel* est le résultat de prêts annuels successifs effectués par le créancier au commencement de chaque année.

Le montant d'une annuité étant égal à la somme des montants de ses placements partiels, il n'y a qu'à déterminer le montant de chaque annuité au bout du temps donné. Si donc nous appelons K le montant de l'annuité, α l'annuité ou rente annuelle, n le nombre d'années, le premier payement ayant eu lieu il y a n années, le second $(n - 1)$ années, etc., le montant de ces placements sera, pour le premier αr^n, pour

le second αr^{n-1}, et ainsi de suite jusqu'au $n^{\text{ième}}$ et dernier qui, ayant eu lieu il n'y a qu'un an, sera αr. La somme de toutes ces valeurs pour n années sera donc

$$K = \alpha r^n + \alpha r^{n-1} + \alpha r^{n-2} + \ldots + \alpha r,$$

et, en multipliant par r,

$$Kr = \alpha r^{n+1} + \alpha r^n + \alpha r^{n-2} + \ldots + \alpha r^2$$

et, en retranchant la première équation de la seconde,

$$K(r-1) \quad \text{ou} \quad Kt = \alpha r^{n+1} - \alpha r;$$

d'où

$$K = \frac{\alpha}{t}(r^{n+1}) - r). \tag{27}$$

Si, par exemple, on demande de trouver le montant de 1^{fr} par an, placé à 5 pour 100 au commencement de chaque année pendant 24 ans, nous avons

$$\begin{aligned} r^{25} &= 3,386355 \\ r &= 1,05 \\ \hline r^{25} - r &= 2,336355 \end{aligned}$$

$$K = 46^{\text{fr}},72710.$$

La formule (27) peut s'écrire comme il suit :

$$K = \frac{\alpha r^{n+1}}{t}(1 - r^{-n}),$$

et, comme $\varphi = \frac{1}{t}(1 - r^{-n})$, nous avons

$$K = \alpha r^{n+1}\varphi, \tag{28}$$

formule très-propre aux calculs logarithmiques.

En outre, nous avons trouvé [formule (26)] que le montant d'une annuité arriérée s'exprime par la formule $S = \alpha r^n \varphi$; on a donc

$$K = Sr,$$

c'est-à-dire que le montant d'un placement annuel est égal

au montant d'une annuité arriérée pour le *même nombre d'années*, augmenté de son intérêt d'un an.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus :

Montant d'une annuité arriérée de 1fr pendant 24 ans.....	44fr,5020
Intérêt annuel de cette somme à 5 pour 100.....	2,2251
Montant d'un placement annuel de 1fr pendant 24 ans.....	46,7271

En désignant par K′ le montant d'un placement annuel de α^{fr} pour $(n+1)$ années, on a

$$K' = \frac{\alpha}{t}(r^{n+2} - r) = \frac{\alpha r^{n+2}}{t} - \frac{\alpha r}{t}.$$

D'ailleurs, le montant K du même placement pour n années est égal à

$$\frac{\alpha}{t}(r^{n+1} - r) = \frac{\alpha r^{n+1}}{t} - \frac{\alpha r}{t}, \quad \text{d'où} \quad rK = \frac{\alpha r^{n+2}}{t} - \frac{\alpha r^2}{t}.$$

En retranchant cette dernière équation de la première, on obtient

$$K' - rK = \frac{\alpha r^2}{t} - \frac{\alpha r}{t} = \frac{\alpha}{t}(r^2 - r) = \frac{\alpha r(r-1)}{r-1} = \alpha r;$$

par conséquent,

$$K' = rK + \alpha r = (K + \alpha)r,$$

c'est-à-dire que le montant de $(n+1)$ placements annuels est égal au produit du montant de 1fr dans 1 an par la somme de l'annuité et de n placements annuels.

Des formules (27) et (28) on peut déduire d'autres formules pour déterminer une quelconque des quantités n et α quand les autres sont données :

$$r^n = 1 + \frac{Kt}{\alpha r}, \tag{29}$$

$$\alpha = \frac{Kr^{-(n+1)}}{\varphi}. \tag{30}$$

§ LXX.

Quelle que puisse être, en général, l'espèce de payement adopté pour l'annuité et l'intérêt, qu'il soit annuel, semes-

triel ou trimestriel, etc., *le montant de l'annuité est toujours égal à la valeur actuelle de la même annuité avec entrée immédiate, multipliée par le montant de* 1^fr^ *au bout de* $(n+1)$ *années.*

Si l'annuité et l'intérêt sont payables *aux mêmes époques*, ν fois par an, divisez la rente annuelle et le taux par le nombre ν, et multipliez par le même nombre ν celui des années.

Il faut noter le cas où les payements, au lieu d'être annuels, sont semestriels, trimestriels, etc.; le montant, dans ce cas, peut ou diminuer ou augmenter.

Ainsi, par exemple, le montant de 1^fr^ par an, payable au commencement de chaque année, est à 5 pour 100 :

	Payements annuels	Payements semestriels.
Pour 2 ans.....	2,153	2,128
Pour 5 ans.....	5,802	5,742
Pour 10 ans.....	13,207	13,092
Pour 20 ans.....	34,719	34,544
Pour 32 ans.....	79,064	79,059
Pour 33 ans.....	84,067	84,099
Pour 40 ans.....	126,840	127,296
Pour 50 ans.....	219,815	221,681

On peut voir par là que, lorsque l'annuité a une durée de 32 ans ou moindre que 32 ans, le montant de l'annuité payable anuellement est *plus grand* que le montant de l'annuité payable par semestre. Si, au contraire, la durée de l'annuité est de 33 ans ou plus, le montant de l'annuité payable annuellement est *inférieur* à celui de l'annuité payable par semestre.

Et, d'une manière générale, si le nombre des payements augmente, le montant de la rente annuelle est *plus grand* que le montant des placements semestriels, trimestriels, etc., jusqu'à ce que les annuités atteignent un certain nombre (*);

(*) Ce nombre, qui est la limite, est déterminé par l'équation

$$(1+t)^{n+1} = \left(1+\frac{t}{\nu}\right)^{n\nu+1} + t\,\frac{\nu-1}{\nu};$$

il diminue à mesure que le taux augmente. Lorsque $\nu = 2$, nous avons

$$(1+t)^{n+1} = \left(1+\frac{t}{2}\right)^{2n+1} + \frac{t}{2}.$$ (*Voir* p. 95.)

au-dessus de ce nombre, le montant de la rente annuelle sera moindre que celui de la rente semestrielle, trimestrielle, etc.

Au delà du nombre n, déterminé par l'équation

$$(1+t)^{n+1} = \left(1+\frac{t}{2}\right)^{2n+1} + \frac{t}{2},$$

pour lequel le montant des placements annuels est égal au montant des placements semestriels, le montant de ces derniers est supérieur à celui des premiers. On peut se demander: après combien d'années en sera-t-il le double ? La solution de cette question est donnée par l'équation suivante :

$$2(1+t)^{n+1} = \left(1+\frac{t}{2}\right)^{2n+1} + \frac{t}{2}.$$

Le dernier terme, dans l'hypothèse de $t = 5$ pour 100 et $\frac{t}{2} = 2\frac{1}{2}$ pour 100, n'étant égal qu'à $\frac{1}{40}$, je le néglige pour le moment.

$$2(1+t)^{n+1} > \left(1+\frac{t}{2}\right)^{2n+1},$$

d'où l'on tire

$$\log 2 + n\log(1+t) + \log(1+t) > 2n\log\left(1+\frac{t}{2}\right) + \log\left(1+\frac{t}{2}\right),$$

$$n < \frac{\log 2 + \log(1+t) - \log\left(1+\frac{t}{2}\right)}{2\log\left(1+\frac{t}{2}\right) - \log(1+t)}.$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,3010300 \\ \log(1+t) &= 0,0211893 \\ \mathrm{Ct}\log\left(1+\frac{t}{2}\right) &= 9,9892761 \\ & \ 0,3114954 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\log(1+t) &= 0,0214477 \\ \mathrm{Ct}\log(1+t) &= \underline{9,9788107} \\ & \ 0,0002584 \end{aligned}$$

$$n < \frac{3114954}{2584} < 1205,474.$$

Enfin, lorsque les payements de l'annuité et de l'intérêt ne coïncident pas, on calcule le montant en supposant l'annuité payable aux mêmes époques que l'intérêt; on multiplie ou l'on divise ensuite le résultat par un des facteurs constants P ou Q (*voir* p. 101).

Exemple CXLII. — *On place* 500^{fr} *au commencement de chaque mois pendant* 13 *ans. Quel sera leur montant au taux de* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100 *payable par semestre?*

$$K = \alpha\varphi r^{n+1}.$$

$$\begin{aligned} \log\alpha &= 3,4771213 \\ \log r^{n+1} &= 0,2609096 \\ \log\varphi &= 1,2905491 \\ P_6 &= \quad 40351 \\ \hline \log K &= 5,0326151 \end{aligned}$$

$$K = 107799^{fr},10.$$

Exemple CXLIII. — *Combien faut-il placer, à* $4\frac{3}{8}$ *pour* 100, *au commencement de chaque année, pour obtenir* 90370^{fr} *au bout de* 61 *ans?*

Ici nous pouvons nous servir de la formule (30)

$$\alpha = \frac{Kr^{-(n+1)}}{\varphi_{(n)}}.$$

$$\begin{aligned} \log K &= 4,95602 \\ \text{Ct}\log r^{n+1} &= 8,84702 \\ \text{Ct}\log\varphi_{(n)} &= 8,67408 \\ \hline \log\alpha &= 2,48612 \end{aligned}$$

$$\alpha = 300^{fr}.$$

Exemple CXLIV. — *Combien faut-il d'années pour obtenir* 10129^{fr} *d'un placement annuel de* 180^{fr}, *à* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100, *l'annuité et l'intérêt étant payables par semestre?*

Ici nous pouvons employer la formule (29)

$$r^n = 1 + \frac{Kt}{\alpha r}.$$

$$\log K = 4,00557$$
$$\log t = 8,35218$$
$$\text{Ct}\log\alpha = 8,04576$$
$$\text{Ct}\log r = 9,99034$$
$$\log\frac{Kt}{\alpha r} = 0,39385$$

$$\frac{Kt}{\alpha r} = 2,4765$$
$$r^n = 3,4765$$
$$\log r^n = 0,54114$$

et

(Tab. 9) $n = 56$ semestres ou 28 ans.

§ LXXI. — Montant de placements annuels augmentant ou diminuant en progression arithmétique.

Puisque le montant d'un placement annuel est toujours r fois plus grand que le montant d'une annuité arriérée, nous aurons, d'après la page 193,

$$K = \frac{r^{n+1}}{t}\left(\alpha + \frac{d}{t}\right) - \frac{r}{t}\left(\alpha + dn + \frac{d}{t}\right).$$

Exemple CXLV. — *Quel est le montant de* 9 *annuités placées au commencement de chaque année, le premier placement étant de* 2000^{fr}, *le deuxième de* 2100^{fr}, *le troisième de* 2200^{fr}, *et le placement de chaque année suivante surpassant de* 100^{fr} *celui de l'année précédente? L'intérêt est de* 5 *pour* 100.

Ici,

$$\alpha = 2000, \quad d = 100, \quad n = 9 \quad \text{et} \quad t = 0,05;$$

donc

$$K = 20 \times 4000\, r^{10} - 4900 \times 21.$$

$$\log 80000 = 4,9030900$$
$$\log r^{10} = 0,2118930$$
$$5,1149830$$

$$\begin{array}{r} \text{fr} \\ 130311,570 \\ -\ 102900 \\ \hline 27411,570 \end{array}$$

montant demandé.

Exemple CXLVI. — *Quel sera, au bout de* 20 *ans, le montant d'une annuité placée au commencement de chaque année et produisant* 5 *pour* 100 *d'intérêt; la première annuité est de* 800^{fr}, *la deuxième de* 760^{fr}, *la troisième de* 720^{fr}, *et ainsi de suite, chaque placement étant inférieur de* 40^{fr} *à celui qui le précède?*

Ici,

$$\alpha = 800, \quad d = -40, \quad n = 20, \quad t = 0{,}05;$$

par conséquent,

$$K = 800 \cdot \frac{1{,}05}{0{,}05} = 16800^{fr},$$

montant demandé.

Taux d'intérêt. — On détermine le taux des placements annuels au moyen de nos Tables de logarithmes ou d'une formule générale.

Puisque la valeur actuelle d'une annuité différée est [formule (21)]

$$D = \alpha\varphi r^{-d},$$

et le montant d'un placement annuel, au même taux,

$$K = \alpha\varphi r^{n+1},$$

il suffit, dans toutes les formules qui ont rapport aux rentes différées, de remplacer $(-d)$ par $(n+1)$ pour obtenir directement les formules relatives au montant des placements annuels.

Par conséquent, la formule générale, pour trouver le taux (p. 175), devient

$$q = \left(\frac{K}{\alpha n}\right)^{\frac{2}{n+1}} - 1, \quad t = \frac{12 + (n-1)q}{12 + (n-1)2q} \cdot q.$$

Exemple CXLVII. — *On a reçu* 39586^{fr} *pour* 67 *annuités de* 500^{fr} *placées au commencement de chaque année. Quel est le taux d'intérêt?*

Le montant de 500^{fr} par an est

(Tab. 37) $5\frac{3}{4}$.	(Tab. 38) $5\frac{7}{8}$.
$\log\alpha = 2,69897$	$\log\alpha = 2,69897$
$\log r^{68} = 1,65107$	$\log r^{68} = 1,68595$
$\log\varphi = 1,22995$	$\log\varphi = 1,22141$
$\log K = 5,57999$	$\log K = 5,60633$

Différence..... 2634

Mais

$$\log 395860 = 5,59754.$$

La différence avec le $5\frac{3}{4}$ pour 100 est égale à 1755. Le taux sera donc

$$5\tfrac{3}{4} + \frac{1755}{2634}\cdot\frac{1}{8} = 5\tfrac{5}{6} \text{ pour } 100.$$

Exemple CXLVIII. — *Le montant de* 200^{fr} *par an, placés au commencement de chaque année, est, au bout de* 51 *ans, de* 46371^{fr} : *trouver le taux.*

Ici, nous pouvons nous servir de la formule générale

$$t = \frac{12 + (n-1)q}{12 + (n-1)2q}\cdot q,$$

ou

$$t = \frac{1 + \dfrac{(n-1)q}{12}}{1 + \dfrac{n-1}{12}\cdot 2q}\cdot q.$$

$$n = 51, \quad \frac{2}{n+1} = \frac{1}{26}, \quad \frac{n-1}{12} = \frac{25}{6};$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
\log K &= 4,66625\\
\mathrm{Ct}\log\alpha &= 7,69897\\
\mathrm{Ct}\log n &= 8,29243\\
&\ 0,65765\\
\log(1+q) &= 0,0252942\\
1+q &= 1,059971\\
q &= 0,059971\\
\frac{25}{6}q &= 0,24988\\
\frac{25}{3}q &= 0,49976\\
t &= \frac{1,24988}{1,49976}\cdot q
\end{aligned}$$

$$\log q = 8,77794$$
$$\quad\quad\;\; 0,09687$$
$$\quad\quad\;\; 9,82398$$
$$\log t = 8,69879$$

Taux vrai..... 5 pour 100.

Annuités à dividende croissant.

§ LXXII.

Il arrive très-souvent que l'on achète des annuités perpétuelles ou de durée limitée entre les termes d'échéance de deux annuités consécutives. Dans ce cas, non-seulement le premier payement, mais tous les autres sont avancés d'une certaine fraction d'année.

Par exemple, si l'on achète le 5 mai des consolidés 3 pour 100, le premier dividende semestriel étant payable 2 mois après, le 5 juillet, et tous ceux qui suivent, de 6 mois en 6 mois, tous les payements ont été avancés de 4 mois, et l'on dit que l'annuité a 4 mois d'entrée.

D'une manière générale, puisque chaque payement est avancé de la même fraction d'année, il suffit de déterminer la valeur de cette même annuité supposée immédiate, et de la multiplier par le montant de 1^{fr} placé pendant le temps qui s'écoule entre l'entrée et le moment d'achat de l'annuité.

Ainsi, si ce temps est $\frac{1}{k}$ de l'intervalle qui sépare deux payements successifs, si t est le taux vrai d'intérêt pour chaque intervalle, et V la valeur actuelle de la même annuité avec entrée immédiate (p. 30), la valeur de l'annuité avec entrée passée sera

$$S = Vr^{\frac{1}{k}}.$$

Achat d'annuités dont l'entrée est déjà passée.

Exemple CXLIX. — *Chercher la valeur actuelle d'une rente annuelle de* 3580^{fr}, *exigible pendant* 27 *ans, à* $5\frac{1}{8}$ *pour* 100 *par*

an, le premier payement ayant son terme d'échéance dans 7 mois.

$$\log \alpha = 3,5538830$$
$$\text{(Tab. 33)} \quad \log \varphi = 1,1599012$$
$$\text{(Tab. 52)} \quad \log r^{\frac{1}{k}} = 0,0090442$$
$$\log S = 4,7228284$$
$$S = 52823^{fr},65.$$

Exemple CL. — *Chercher la valeur actuelle de* 15 *annuités de* 16000^{fr}, *payables tous les trois mois, à* $4\frac{3}{4}$ *pour* 100 *par an, payables tous les six mois : le premier payement de* 4000^{fr} *n'est dû que dans* 4 *mois.*

L'intérêt étant semestriel, prenez la moitié de la rente annuelle et du taux, et doublez le nombre des payements; nous aurons ainsi 30 annuités de 8000^{fr}, payables tous les six mois, à $2\frac{3}{8}$ pour 100, avec une entrée de 4 mois; par conséquent,

$$\log 8000 = 3,9030900$$
$$\text{(Tab. 10)} \quad \log \varphi = 1,3280416$$
$$\text{(Tab. 51)} \quad \log r^{\frac{1}{k}} = 0,0033980$$
$$P_2 = 25560$$
$$\log S = 5,2370856$$
$$S = 172617^{fr},80.$$

§ LXXIII.

Le taux des annuités à dividende croissant s'obtient au moyen de l'interpolation, comme le taux des annuités immédiates.

Exemple CLI. — *Quel est le taux d'une annuité de* 680^{fr}, *exigible pendant* 21 *ans, dont le premier payement aura lieu*

dans 10 *mois, et qui a été achetée au prix de* 8742^{fr},20.

A 5 pour 100.	A 5 $\frac{1}{8}$ pour 100.
$\log\alpha = 2,83251$	$\log\alpha = 2,83251$
$\log\varphi = 1,10793$	$\log\varphi = 1,10793$
$\log r^{\frac{1}{k}} = 0,00353$	$\log r^{\frac{1}{k}} = 0,00362$
3,94397	3,93929

Différence..... 468

$$\log 8742,20 = 3,94162.$$

La différence avec le 5 pour 100 est égale à 235; par conséquent,

$$t = 5 + \frac{1}{8}\cdot\frac{235}{468} = 5\tfrac{1}{16} \text{ pour 100 par an, ou } 2\tfrac{1}{2} \text{ pour 100 par semestre.}$$

Exemple CLII. — *Trouver le taux annuel pour une annuité de* 2800^{fr}, *exigible pendant* 31 *ans, payable par trimestre, avec une entrée de deux mois, et que l'on a payée* 44522^{fr},90.

A 5 pour 100.	A 5 $\frac{1}{8}$ pour 100.
$\log\alpha = 3,44716$	$\log\alpha = 3,44716$
$\log\varphi = 1,19292$	$\log\varphi = 1,18662$
$\log r^{\frac{1}{k}} = 0,00353$	$\log r^{\frac{1}{k}} = 0,00362$
$P_4 = 0,00799$	$P_4 = 0,00818$
4,65160	4,64558

Différence..... 602

$$\log 44522,90 = 4,64858.$$

La différence avec le 5 pour 100 est égale à 302; par conséquent,

$$t = 5 + \frac{1}{8}\cdot\frac{302}{602} = 5\tfrac{1}{16} \text{ pour 100 par an, ou } 2\tfrac{1}{2} \text{ pour 100 par semestre.}$$

§ LXXIV. — Taux des rentes sur l'État.

Les dividendes semestriels des rentes se payent à des époques fixes :

Le 5 *janvier et le* 5 *juillet.*

Les consolidés 3 pour 100, le 3 pour 100 de 1726, les nouvelles annuités 5 pour 100, et les annuités viagères transférées entre le 5 janvier et le 4 avril, ou entre le 5 juillet et le 9 octobre.

Le 5 *avril et le* 10 *octobre :* la rente de la Banque, le 3 pour 100 réduit, les annuités à longs termes, les annuités viagères transférées entre le 5 avril et le 4 juillet, ou entre le 10 octobre et le 4 janvier.

Par conséquent, au moment de l'achat des rentes, le *temps de l'entrée*, c'est-à-dire le temps écoulé depuis le payement du dernier dividende, doit être pris en considération.

Par exemple, si l'on achète le 5 mars des consolidés 3 pour 100, nous ferons remarquer que, d'une part, l'intérêt de deux mois, environ $\frac{1}{2}$lst, qui n'est payable que 4 mois après, et, d'autre part, tous les payements sont avancés de 2 mois.

Soit donc C le prix entier de la rente 3 pour 100 [c'est-à-dire le *prix* de cette rente, y compris le courtage (¹)], avec une entrée de $\frac{1}{k}$ de semestre.

Soit t le taux semestriel vrai, nous aurons

$$C = \frac{1\frac{1}{2}}{t} \cdot r^{\frac{1}{k}}.$$

Exemple CLIII. — *Trouver quel doit être le cours des consolidés* 3 *pour* 100 *au* 17 *mars, pour que l'acheteur place son argent au taux de* $3\frac{1}{4}$ *pour* 100 *payable par semestre.*

Du 5 janvier au 5 juillet, il y a 181 jours, au 17 mars, 76 jours; par conséquent,

$$\frac{1}{k} = \frac{76}{181} \quad \text{et} \quad t = 1\tfrac{1}{8} \text{ pour } 100.$$

(¹) Le droit de courtage pour la vente ou l'achat des rentes est de $\frac{1}{8}$ pour 100 sur la *quantité* de la Rente, et ne peut jamais être moindre que 1s, quelque faible que puisse être la somme transférée.

Les frais de courtage ne sont pas toujours les mêmes; quelques agents de change demandent *six pence* pour chaque rente de 10lst ou au-dessous; d'autres 1s pour 25lst, 1s, 6d pour 50lst, 2s pour 75lst ou au-dessous, et 2s, 6d au-dessus de 75lst.

$\log 1\frac{1}{2} =$	0,17609
$\mathrm{Ct} \log t =$	1,78915
$\frac{1}{k} \log r =$	0,00294
$\log \mathrm{C} =$	1,96818
$\mathrm{C} =$	92,810
Courtage.....	0,125
Total des frais.....	92,935

Pour trouver le taux d'une somme d'argent placée en rentes 3 pour 100, nous avons la formule

$$\mathrm{C} = \frac{1\frac{1}{2}}{t} \cdot (1 + t)^{\frac{1}{k}};$$

en la développant d'après le théorème du binôme, et en négligeant les puissances troisièmes et au-dessus de t, on a

$$\mathrm{C}t = \frac{3}{2}\left[1 + \frac{t}{k} + \frac{t^2}{2k}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\right] = \frac{3}{2} + \frac{3t}{2k} - \frac{3t^2}{4k}\left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

d'où

$$\left(\mathrm{C} - \frac{3}{2k}\right)t = \frac{3}{2} - \frac{3t^2}{4k}\left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

$$(31) \qquad t = \frac{1,5}{\mathrm{C} - \frac{3}{2k}} - \frac{3t^2}{4k} \cdot \frac{1 - \frac{1}{k}}{\mathrm{C} - \frac{3}{2k}}.$$

En laissant de côté, comme de peu de valeur, le dernier terme de cette équation, on a

$$t = \frac{1,5}{\mathrm{C} - \frac{3}{2k}}.$$

Mais $\frac{3}{2k}$ est l'*intérêt simple* d'une rente de 100^{fr}, correspondant à $\frac{1}{k}$ de semestre; par conséquent, pour trouver, par l'approximation du premier degré, le taux d'une rente 3 pour 100, calculez la valeur du *dividende proportionnel ou croissant*, depuis le terme d'échéance du dernier dividende jusqu'au jour donné; retranchez-la du prix donné de

la rente, afin de trouver le *prix net* et divisez par ce *prix net* le taux semestriel.

Exemple CLIV. — *Trouver le taux d'intérêt que l'on retire d'une somme d'argent placée en consolidés* 3 *pour* 100, *à* 94 $\frac{3}{4}$ *pour* 100, *au* 19 *janvier* 1877.

Du 5 janvier au 5 juillet, il y a 181 jours; du 5 janvier au 19 janvier, 14 jours. Le dividende, pour 181 jours, étant de 1 $\frac{1}{2}$ lst, le dividende proportionnel sera de 0lst,116; par conséquent,

Prix.....		94,750 lst
Droit de courtage.....		0,125
Total des frais.....	C =	94,875
Dividende proportionnel.....	$\frac{3}{2k}$ =	0,116
Prix net des rentes.....	C — $\frac{3}{2k}$ =	94,759

abstraction faite du dividende, et 1 $\frac{1}{2}$ lst divisé par ce dernier nombre donnera 1,58296 pour 100 par semestre ou 3,1659 pour 100 par an.

Exemple CLV. — *Quel est le taux d'intérêt des consolidés à* 98 $\frac{1}{4}$ *pour* 100, *au* 10 *novembre* 1858?

Du 5 juillet au 5 janvier, il y a 184 jours; du 5 juillet au 10 novembre, 128 jours. Le dividende proportionnel sera

$$\frac{128}{184} \cdot 1\frac{1}{2} = 1^{\text{lst}},043478,$$

Prix.....		98,250 lst
Courtage.....		0,125
Total des frais.....	C =	98,375
Dividende croissant.....		1,043478
Prix net.....	C — $\frac{3}{2k}$ =	97,331522

1lst $\frac{1}{2}$ divisé par ce nombre donnera 1,541125 pour 100.

Le taux obtenu par la simple application du premier

terme de l'équation (31) est toujours *trop grand* d'une quantité inférieure à la valeur du second terme fractionnaire; ainsi, si nous prenons pour valeur de t le résultat que nous venons d'obtenir, nous avons

$$\begin{aligned}
\log\frac{3}{4} &= 9,875\\
\log t^2 &= 6,376\\
\log\frac{1}{k} &= 9,842\\
\log\left(1-\frac{1}{k}\right) &= 9,483\\
\mathrm{Ct}\log\left(\mathrm{C}-\frac{3}{2k}\right) &= 8,012\\
\hline
&\ 3,588
\end{aligned}$$

Ainsi le logarithme du second terme fractionnaire est 3,588.

Le nombre correspondant à ce logarithme est.. ..	0,00000039
En le retranchant de.....	0,01541125
Nous avons pour valeur corrigée de t.....	0,01541086

taux vrai, au dernier chiffre près; par conséquent, le taux de l'intérêt est de 3,082172 pour 100 par an, payables par semestre (*).

(*) Ici se termine la *partie théorique* de l'Ouvrage de Fédor Thoman sur les intérêts composés et les annuités. Avant de présenter les Tables dont elle est la base, nous croyons utile de joindre au présent Traité un extrait d'un autre Ouvrage du même auteur (*Tables de logarithmes à 27 décimales pour les calculs de précision*), dans lequel on indique un procédé facile et simple pour trouver, au moyen de trois Tables, le logarithme d'un nombre donné ou le nombre correspondant à un logarithme donné, jusqu'à dix chiffres exacts. Les trois Tables en question viendront à la suite de celles qui concernent les calculs d'intérêts composés et d'annuités et porteront les numéros VIII, IX, X.

FIN.

TABLES DE LOGARITHMES

A 11 DÉCIMALES,

PAR FÉDOR THOMAN.

I. — INTRODUCTION.

Le but de ces Tables est de trouver par un procédé facile et simple, *sans division, sans interpolation et sans formule,* le logarithme d'un nombre donné ou le nombre correspondant à un logarithme donné.

Ces Tables sont à 11 décimales et permettent d'obtenir les logarithmes ou les nombres avec toute l'exactitude que l'on désire jusqu'à dix chiffres exacts.

II. — RECHERCHE DU LOGARITHME PAR LA MÉTHODE DES RÉCIPROQUES APPROCHÉS.

Dans tout logarithme vulgaire, on distingue deux parties : le nombre entier ou *caractéristique,* et la partie décimale ou *mantisse.*

La *caractéristique* renferme toujours autant d'unités moins une qu'il y a de chiffres à la partie entière.

La *mantisse,* seule partie du logarithme que l'on inscrive dans les Tables, est aussi la seule qu'il faut calculer et dont nous ayons à nous occuper. Elle est complétement indépendante de la position de la virgule décimale dans le nombre; on pourra donc considérer les nombres indépendamment de la

position de la virgule; il en sera de même des facteurs auxiliaires par lesquels nous aurons à les multiplier : par conséquent, dans les calculs qui vont suivre, on placera la virgule décimale du nombre dont on cherche le logarithme, ainsi que celle des facteurs, de la manière qui semblera la plus commode, soit pour le raisonnement, soit pour le calcul.

Notation. — Pour faire usage de nos Tables, nous emploierons une notation qui facilite considérablement le calcul, et qui ne peut donner lieu à aucune équivoque; pour la faire comprendre immédiatement, il suffit d'en donner quelques exemples avec la traduction en regard. Ainsi,

$0,0^{3}8$	signifie.....	$0,0008$
$1,0^{4}8$	»	$1,00008$
$1,0^{\overline{4}}8$	»	$1 - 0,00008 = 0,99992$

Les nombres donnés sous cette forme servent de multiplicateurs; mais les multiplications sont très-faciles.

Pour effectuer la multiplication d'un nombre décimal quelconque par un nombre de la forme $\left(1 \pm \frac{a}{10^{n}}\right)$, on sépare d'abord du multiplicande les n derniers chiffres, ce qui équivaut à la division par 10^{n}; puis on multiplie les chiffres qui restent par le facteur a; le résultat de la multiplication ajouté ou soustrait, suivant le signe de a, donne le produit demandé.

Exemple I. — *Soit à multiplier* 1,00006.55177 *par* 1,0002.

$$\begin{array}{lr} & 1,00006\,55177 \times 1,0^{3}2 \\ & \underline{2 \qquad 131} \\ \text{Produit.....} & 1,00026\,55308 \end{array}$$

Exemple II. — *Multiplier* 0,99997 034567 *par* 1,00003.

$$\begin{array}{lr} & 0,99997\,034567 \times 1,0^{4}3 \\ & \underline{2\,999911} \\ \text{Produit.....} & 1,0^{6} \quad 34478 \end{array}$$

Exemple III. — *Multiplier* 1,00000 04712 516831 *par* 0,9999996.

$$\begin{array}{lll} & 1,0^{6}4712\,516831 \times 1,0^{6}\bar{4} & \\ & \underline{4 \qquad\qquad 1885} & \\ \text{Produit.....} & 1,0^{7}\ 712\,514946 & \end{array}$$

Logarithme de $(1 \pm \theta)$.

Désignons par e la base des logarithmes naturels :

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots = 2,71828\ 18284.$$

et par k son logarithme vulgaire,

$$k = \log e = 0,43429\ldots,$$

le nombre k s'appelle le *module* des logarithmes vulgaires.

Lorsqu'un nombre diffère peu de l'unité, soit en plus, soit en moins, de manière que les n premiers chiffres après la virgule décimale soient tous des zéros, ou tous des 9, son logarithme à $2n$ chiffres est égal au *module* multiplié par la fraction décimale qui est la différence entre ce nombre et l'unité, ou

$$\log(1 + \theta) = k\theta,$$
$$\log(1 - \theta) = -k\theta.$$

Ainsi, on trouve avec dix décimales exactes.

$$\log 1,000004 = \quad 0,00000\ 17372$$
$$\log 0,999996 = -0,00000\ 17372 = 9,99999\ 82628$$

La colonne $k\theta$ de la Table VIII contient les 100 premiers multiples de k, et donne, soit directement, soit à l'aide d'une simple addition, les logarithmes à $2n$ décimales de tous les nombres composés de l'unité suivie de n zéros au moins, et de tous les nombres commençant par n chiffres 9.

On prendra les chiffres de la fraction décimale deux à deux, et l'on écrira au-dessous le produit par le module, produit qui sera toujours un peu moindre que la moitié du nombre exprimé par les deux chiffres.

EXEMPLE IV. — *On demande avec* 11 *décimales*

$$\log 1{,}00000\,034969.$$

Ce logarithme est égal à

$$k \times 0{,}0^{6}34969.$$

$$\begin{array}{r} 1{,}0^{6}34969 \\ \hline 14766 \\ 4169 \\ 39 \\ \hline \end{array}$$

Donc $\log 1{,}0^{6}34969 = 0{,}0^{6}15187$

EXEMPLE V. — *On demande avec* 11 *décimales*

$$\log 999999\,65031.$$

On a

$$0{,}999999\,65031 = 1 - 0^{6}34969;$$

donc son logarithme sera égal à

$$-k \times 0{,}0^{6}34969;$$

ou, d'après l'exemple précédent, égal à

$$-0{,}0^{6}15187;$$

d'où

$$\log 999999\,65031 = 10{,}999999\,84813.$$

RÉCIPROQUES APPROCHÉS.

Puisqu'on connaît directement le logarithme de $(1 \pm \theta)$, lorsque θ est suffisamment petit, il est évident que l'on connaît le logarithme de tout autre nombre, lorsque, en le multipliant par un ou plusieurs facteurs compris dans les Tables, on obtient un produit de la forme $(1 \pm \theta)$. On y arrive facilement au moyen des *réciproques approchés*.

Deux nombres sont *réciproques* l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à l'unité; ainsi,

$$6{,}4 \quad \text{et} \quad 0{,}15625$$

sont réciproques; car,

$$6,4 \times 0,15625 = 1.$$

Soit a une quantité moindre que l'unité; il résulte de la relation

$$(1 + a)(1 - a) = 1 - a^2$$

qué

$$(1 + a)(1 - a) + a^2 = 1;$$

donc

$$(1 + a)\left(1 - a + \frac{a^2}{1 + a}\right) = 1 \quad \text{et} \quad (1 - a)\left(1 + a + \frac{a^2}{1 - a}\right) = 1.$$

On voit que la somme d'un nombre et de son réciproque est toujours plus grande que 2; mais elle n'en diffère que d'une quantité à peu près égale au carré de a, lorsque celui-ci est petit. Par conséquent, si a est suffisamment petit, et si d est une quantité moindre que a, $(1 + a)$ sera le *réciproque approché* de $(1 - a + d)$ et $(1 - a)$ sera le *réciproque approché* de $(1 + a + d)$.

Désignons le nombre par N et son réciproque par R, de manière que $NR = 1$; et soit, par exemple, $a = 0,0003$; le réciproque de 1,003 sera plus grand que 0,9997; mais il n'en diffère que d'une quantité moindre que 0,00000009; en effet on a

$$N = 1,0003,$$

donc

$$R > 0,9997, \quad R = 0,99970008997 3 \quad \text{et} \quad N + R = 2,0'89973.$$

Le produit d'un nombre par son réciproque étant égal à l'unité, il s'ensuit que, si l'on multiplie un nombre par son réciproque augmenté ou diminué d'une petite quantité, le produit sera plus grand ou plus petit que l'unité, qu'il sera de la forme $(1 \pm \theta)$, et que la quantité sera d'autant plus petite que la différence entre le *réciproque approché* et le *réciproque exact* sera moindre.

Ainsi, par exemple, le réciproque de 5,3 est 0,188679... et leur produit est égal à l'unité; si, au lieu d'employer pour

facteur le réciproque exact 0,188679... on multiplie 5,3 par 0,19, *valeur approchée* du réciproque, on obtient pour produit 1,007.

De même, le réciproque de 1,0008006543 est plus grand que 0,9991993457, et si l'on multiplie ce nombre par 0,9992 ou $1,0^{3}\bar{8}$, on obtient pour produit $1,0^{7}138$.

Enfin, comme nous allons le démontrer plus loin, tout nombre peut, à l'aide d'une ou de plusieurs multiplications par des réciproques approchés, être amené à un produit de la forme $(1 \pm \theta)$ dont on trouve directement le logarithme dans la Table X.

La question de la recherche des logarithmes se réduit donc à choisir des *réciproques approchés* qui soient tous compris dans la Table. Il est facile de remplir cette condition à l'aide des considérations suivantes :

I. — *Tout nombre multiplié par son réciproque forcé au second chiffre donne pour produit l'unité suivie immédiatement d'un zéro au moins.*

En effet, si l'on s'arrête au second chiffre du réciproque, en l'augmentant d'une unité, il est évident qu'on l'aura augmenté de moins d'un dixième de sa valeur; par conséquent, en multipliant le nombre par son réciproque forcé, on aura un produit plus grand que 1, mais plus petit que 1,1; donc le premier chiffre décimal du produit sera nécessairement un zéro.

Exemple : le réciproque de 77 est 1298701; si l'on multiplie 77 par 13, on obtient pour produit 1001.

La Table VIII $\left(\text{colonne } \frac{1}{a}\right)$ donne les réciproques de tous les nombres naturels de 1 à 100; pour connaître le réciproque forcé d'un nombre, on prendra dans la colonne intitulée $\frac{1}{a}$ deux nombres consécutifs, l'un plus grand, l'autre plus petit que le nombre donné, abstraction faite de la virgule décimale; puis on multipliera par le plus grand des deux réciproques.

Ainsi, par exemple, étant donné le nombre 27802345, on trouve dans la Table que ce nombre est compris entre 2857, *réciproque* de 35, et 2778, *réciproque* de 36; donc le réciproque de 2780 est compris entre 35 et 36, et, en le multipliant par 36, on doit obtenir un produit plus grand que l'unité, mais moindre que 1,1; en effet,

$$3,6 \times 0,27802345 = 1,00088442.$$

II. — *Lorsqu'un nombre est composé de l'unité suivie d'une fraction décimale dont les premiers chiffres sont des zéros et qu'on le multiplie par l'unité diminuée de la valeur du premier chiffre significatif, on obtient toujours un produit plus approché de l'unité que le nombre donné.*

Ainsi, par exemple, si les premiers chiffres du nombre donné sont 1,0004..., on le multiplie par son réciproque approché au cinquième chiffre $1,0^3\bar{4}$.

Comme le réciproque de $1,0^3\bar{4}$ ou de 0, 9996 est

$$1,0004001600 64,$$

il s'ensuit que, si le nombre donné est plus grand que ce réciproque, c'est-à-dire s'il est compris entre 1,00049999 et 1,00040016, le produit sera plus grand que l'unité, mais il sera toujours plus petit que $1,0005 \times 1,0^3\bar{4} = 1,00009980$; par conséquent, le produit aura toujours au moins un zéro de plus après la virgule décimale. On aura, par exemple :

$$1,0^349896 \times 1,0^3\bar{4} = 1,0^49876,$$
$$1,0^340694 \times 1,0^3\bar{4} = 1,0^5678,$$
$$1,0^340094 \times 1,0^3\bar{4} = 1,0^678,$$
$$1,0^340024 \times 1,0^3\bar{4} = 1,0^78,$$
$$1,0^340017 \times 1,0^3\bar{4} = 1,0^71.$$

Enfin, si le nombre donné est moindre que le réciproque de $1,0^3\bar{4}$, c'est-à-dire s'il est compris entre 1,0004.0016 et 1,0004.0000, le produit sera moindre que l'unité, mais plus grand que $1,0^34 \times 1,0^3\bar{4} = 0,99999984$; par conséquent,

les zéros seront remplacés par un *nombre au moins double* de chiffres 9. Ainsi l'on aura

$$1,0^{3}40015 \times 1,0^{3}\bar{4} = 0,99999999,$$
$$1,0^{3}40003 \times 1,0^{3}\bar{4} = 0,99999987.$$

Désignons, en général, par a la valeur absolue du premier chiffre significatif et par d la valeur de la fraction décimale qui le suit : le nombre sera $(1 + a + d)$, et si l'on effectue la multiplication par le réciproque approché $(1 - a)$, le produit sera

$$[1 + d - a(a + d)];$$

par conséquent, le premier chiffre de la fraction décimale sera supprimé, et la fraction décimale qui le suit sera diminuée.

Mais le réciproque de $(1 - a)$ est $\left(1 + a + \frac{a^2}{1-a}\right)$; donc, si d est plus grand que $\frac{a^2}{1-a}$, le nombre $(1 + a + d)$ est plus grand que le réciproque de $(1 - a)$, et le produit sera plus grand que l'unité; mais il aura au moins un zéro de plus que $(1 + a + d)$, attendu qu'il sera moindre que $(1 + d)$. Exemple :

$$\begin{array}{l} 1,00007\ 26334 \times 1,0^{4}\bar{7} \\ \quad\ \ 7 \qquad 51 \\ \hline 1,0^{5} \qquad 26283 \end{array}$$

Si d est moindre que $\frac{a^2}{1-a}$, le nombre $(1 + a + d)$ sera plus petit que le réciproque de $(1 - a)$; donc le produit sera compris entre l'unité et $(1 + a)(1 - a) = 1 - a^2$.

Or a est un nombre entier du $n^{\text{ième}}$ ordre décimal, compris entre 1 et 9; donc son carré a^2 sera du $2n^{\text{ième}}$ ordre décimal et compris entre 1 et 81, et si $(1 + a)$ contient $(n - 1)$ zéros après la virgule décimale, $(1 - a^2)$ contiendra un nombre de 9 au moins double. Exemple

$$\begin{array}{l} 1,00007\ 00045 \times 1,0^{4}\bar{7} \\ \quad -7 \qquad 49 \\ \hline 0,99999\ 99996 \end{array}$$

III. — *Lorsqu'un nombre commence par plusieurs chiffres* 9 *et qu'on le multiplie par l'unité augmentée du complément arithmétique du premier chiffre décimal à la suite des* 9, *on obtient toujours un produit plus rapproché de l'unité que le nombre donné.*

Ainsi, par exemple, soit le nombre donné 0,9996...; on le multipliera par $1,0^{3}4$. Comme le réciproque de $1,0^{3}4$ est 9996001599... il s'ensuit que, si le nombre donné est plus grand que ce réciproque, c'est-à-dire s'il est compris entre 0,99969999 et 0,99960016, le produit sera plus grand que l'unité, mais il sera plus petit que

$$0,9997 \times 1,0^{3}4 = 1,0^{3}\bar{3} \times 1,0^{3}4 = 1,00009988;$$

par conséquent, on obtiendra pour produit l'unité suivie d'un nombre de zéros plus considérable que le nombre des 9 par lesquels commençait le nombre proposé. Ainsi, par exemple, on aura avec 8 décimales :

$$\begin{aligned}
&0,99965696 \times 1,0^{3}4 = 1,0^{4}5682,\\
&0,99960694 \times 1,0^{3}4 = 1,0^{5}678,\\
&0,99960094 \times 1,0^{3}4 = 1,0^{6}78,\\
&0,99960024 \times 1,0^{3}4 = 1,0^{7}8,\\
&0,99960016 \times 1,0^{3}4 = 1.
\end{aligned}$$

Enfin, si le nombre donné est moindre que le réciproque de $1,0^{3}4$, c'est-à-dire s'il est compris entre 0,99960016 et 0,99960000, le produit sera moindre que l'unité, mais plus grand que $1,0^{3}\bar{4} \times 1,0^{3}4 = 0,99999984$; par conséquent, on aura, après la virgule décimale, un nombre de 9 au moins double; par exemple,

$$0,99960015 \times 1,0^{3}4 = 0,99999999.$$

En général, désignons par a le complément du premier chiffre après les 9, et par d la valeur de la fraction décimale qui suit; le nombre sera $(1 - a + d)$, et, si l'on effectue la multiplication par le réciproque approché $(1 + a)$, le produit

sera $1 + d - a(a - d)$. Mais le réciproque de $(1 + a)$ est $\left(1 - a + \frac{a^2}{1+a}\right)$; donc, si $d > \frac{a^2}{1+a}$, le nombre $(1 - a + d)$ sera plus grand que le réciproque de $(1 + a)$ et le produit sera plus grand que l'unité; en outre, puisque ce produit est moindre que $(1 + d)$, il aura au moins un zéro de plus que le nombre n'avait de 9.

Par conséquent, tous les 9 et le premier chiffre de la fraction décimale a seront supprimés, et la fraction décimale qui les suit sera diminuée de $a(a - d)$. Exemple :

$$\begin{array}{r} 0,99995\,84672 \times 1,0^{4}5 \\ 4\,99979 \\ \hline 1,00000\,84651 \end{array}$$

Si $d < \frac{a^2}{1+a}$, le nombre $(1 - a + d)$ sera moindre que le réciproque de $(1 + a)$, et le produit sera moindre que l'unité, mais plus grand que $(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$.

Donc, si a est un nombre entier du $n^{\text{ième}}$ ordre décimal, compris entre 1 et 9, son carré a^2 sera du $2n^{\text{ième}}$ ordre décimal, et compris entre 1 et 81, et, lorsque $(1 - a)$ contient $(n - 1)$ chiffres 9 après la virgule décimale, $(1 - a^2)$ contiendra un nombre de 9 au moins double. Exemple :

$$\begin{array}{r} 0,99995\,00021 \times 1,0^{4}5 \\ 4\,99975 \\ \hline 0,99999\,99996 \end{array}$$

La Table X contient les logarithmes des nombres de la forme $\left(1 + \frac{a}{10^n}\right)$, depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 6$.

En résumé, d'après ce que je viens de démontrer, toute la recherche du logarithme d'un nombre donné se réduit à multiplier successivement le nombre par des *réciproques approchés* au second chiffre significatif, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un produit de la forme $(1 \pm \theta)$ dont on trouve le logarithme par simple addition.

On multiplie d'abord le nombre donné par son *réciproque*

forcé au *second chiffre;* le produit sera un nombre composé de l'unité et d'une fraction décimale commençant par un ou plusieurs zéros; ensuite ce produit multiplié par l'unité diminuée de la valeur du premier chiffre significatif (c'est-à-dire par son *réciproque approché* au deuxième chiffre) donnera un nouveau produit ayant après la virgule décimale au moins un zéro de plus.

En continuant de procéder ainsi, on finira par obtenir un produit de la forme $(1+\theta)$ et dont le logarithme est égal à $k\theta$.

Soient

N le nombre donné;
p son réciproque forcé;
$(1-a)$, $(1-b)$, $(1-c)$, ... les autres facteurs;
$(-\alpha)$, $(-\beta)$, $(-\gamma)$, ... leurs logarithmes respectifs;
$(1+\theta)$ le produit final.

On aura

$$Np(1-a)(1-b)(1-c)\ldots = 1+\theta;$$

d'où

$$\log N + \log p - (\alpha+\beta+\gamma+\ldots) = k\theta$$

et

$$\log N = \mathrm{Ct}\log p + (\alpha+\beta+\gamma+\ldots) + k\theta.$$

Or la Table VIII $\left(\text{colonne } \frac{1}{a}\right)$ contient les compléments des logarithmes des 100 premiers nombres naturels; la Table X [colonne $-\log(1-\theta)$] contient les compléments des logarithmes des nombres de la forme $\left(1-\frac{a}{10^n}\right)$; et la colonne $k\theta$ de la Table VIII contient les multiples de k.

Par conséquent, au moyen de ces deux Tables, il sera toujours facile de trouver le logarithme de tout nombre donné.

Exemple VI. — *Calculer avec dix décimales exactes*

$$\log 588236543 2.$$

En multipliant le nombre donné par son réciproque

forcé 17, on obtient pour produit $1,0^{5}212344$, dont on trouve, Table VIII, le logarithme au moyen d'une simple multiplication par le module. Voici tout le calcul :

$$
\begin{array}{rl}
 & 58823\,65432 \times 17 \\
 & 41176\,558024 \\
\hline
 & 1,00000\,212344 = 1 + \theta \\
 & \quad 912018 \\
 & \quad\quad 9989 \\
 & \quad\quad\quad 191 \\
 & 76955\,107862 \quad = \mathrm{Ct}\log 17 \quad \text{(Tab. VIII)} \\
\hline
\log N = & 9,76955\,200082
\end{array}
$$

Exemple VII. — *Calculer avec dix décimales exactes le logarithme de* 1,96471598.

On voit (Table VIII) que le réciproque du nombre donné est moindre que 51; en multipliant le nombre par 51, on obtient pour produit 1,002005... qui, multiplié lui-même par *son réciproque approché* 0,998 ou $1,0^{2}\bar{2}$, donnera pour produit final $1,0^{5}11395$ dont on trouve directement le logarithme (Table VIII, colonne $k\theta$).

Voici tout le calcul :

$$
\begin{array}{rl}
 & 19647\,1598 \times 51 \\
 & 982357\,990 \\
\hline
 & 1,002005\,1498 \times 1,0^{2}\bar{2} \\
 & \quad 2\quad 40103 \\
\hline
 & 1,0^{5}\quad 11395 = 1 + \theta \\
 & \quad\quad 47772 \\
 & \quad\quad\quad 1694 \\
 & \quad\quad\quad\quad 22 \\
\hline
 & \quad\quad\quad 4949 \quad = \log(1 + \theta) \\
 & \quad\quad 86\,94587 \quad = -\log 1,0^{2}\bar{2} \quad \text{(Tab. X)} \\
 & 29242\,98239 \quad = \mathrm{Ct}\log 51 \quad \text{(Tab. VIII)} \\
\hline
 & 0,29329\,97775 \quad = \log N.
\end{array}
$$

Exemple VIII. — *Calculer le logarithme de* 1,00040 01213 *avec* 10 *chiffres exacts.*

$$
\begin{array}{rl}
1,00040\,012130 & \times\ 1,0^{3}\bar{4} \\
4\quad 16005 & \\
\hline
0,99999\,996125 & = 1 - \theta \\
3875 & = \theta \\
\hline
1650 & \\
33 & \\
\hline
-1683 & = \log(1-\theta) \\
0,0^{3}\ 17375255 & = \mathrm{Ct}\log 1,0^{3}\bar{4} \quad (\text{Tab. X}) \\
\hline
0,00017\,373572 & = \log N.
\end{array}
$$

Dans cet exemple, le produit du nombre donné par son réciproque approché $1,0^{3}\bar{4}$ est moindre que l'unité; par conséquent, son logarithme est négatif.

Exemple IX. — *Déterminer avec* 10 *décimales*

$$\log 99982\,345678.$$

$$
\begin{array}{rl}
0,99982\,345678 & \times\ 1,0^{3}2 \\
19\,996469 & \\
\hline
1,0^{4}\quad 2\,342147 & \times\ 1,0^{4}\bar{2} \\
2\quad 47 & \\
\hline
1,0^{5}\quad 342100 & = 1 + \theta \\
147660 & \\
912 & \\
\hline
0,0^{5}\quad 148572 & = \log(1+\theta) \\
868598 & = \mathrm{Ct}\log 1,0^{4}\bar{2} \\
99991\,314979 & = \mathrm{Ct}\log 1,0^{3}2 \\
\hline
11,99992\,332149 & = \log N.
\end{array}
$$

III. — Recherche du nombre.

Lorsque le logarithme donné est une fraction décimale, *positive* ou *négative*, dont la première moitié au moins est composée exclusivement de zéros, le nombre correspondant est

égal à l'unité, plus le logarithme divisé par le module; ainsi, si $\log x = \theta$, on aura

$$x = 1 + \frac{\theta}{k};$$

et, si $\log x = -\theta$, on aura

$$x = 1 - \frac{\theta}{k}.$$

Or, puisque $k = 0,43429\ldots$, on a

$$\frac{1}{k} = 2,30258;$$

par conséquent, le nombre cherché est un peu plus grand que l'unité augmentée du double du logarithme.

Par exemple, si $\log x = 0,00001\ldots$, on a

$$x = 1,000023026,$$

et si $\log x = -0,00001 = 9,9999$,

$$x = -0,000023026 = 9,999976974.$$

La colonne $\frac{\theta}{k}$ de la Table IX contient les 100 premiers multiples de $\frac{1}{k}$, et donne, soit directement, soit à l'aide d'une simple addition, les nombres à $(2n - 1)$ chiffres de tous les logarithmes, positifs ou négatifs, commençant par n zéros. On prendra les chiffres deux à deux, en écrivant au-dessous le produit qui est toujours un peu plus grand que le double du nombre exprimé par les deux chiffres. La somme de tous ces produits partiels augmentée de l'unité sera le nombre cherché.

Par exemple, soit $\log x = 0,0000001 51868$, on trouvera (Tab. IX) :

Pour 15.....	345388
Pour 18.....	41447
Pour 68.....	1566
Pour x.....	1,000000349689

Pour tout autre logarithme, le calcul du nombre corres-

pondant est très-simple : *Du logarithme donné, on retranche celui de la Table IX, qui s'en approche le plus par défaut; on agit de même pour tous les restes obtenus successivement, en retranchant les plus grands logarithmes de la Table X contenus dans les restes; puis on cherche le produit des nombres correspondant aux logarithmes soustraits.*

Il n'est pas nécessaire de continuer le calcul jusqu'à ce que tous les chiffres significatifs soient supprimés. Pour obtenir le nombre exact à $(2n - 1)$ chiffres, on peut cesser la soustraction des logarithmes dès qu'on sera arrivé à un reste commençant par n zéros, et dont on trouve directement le nombre correspondant par simple addition. En résumé, si l'on désigne par x le nombre cherché, par $\log N$, $\log(1 + a)$, $\log(1 + b)$, ... les logarithmes soustraits du logarithme donné, et par θ le reste, de manière que

$$\log x = \log N + \log(1 + a) + \log(1 + b) + \ldots + \theta,$$

le nombre cherché sera

$$x = F(1 + a)(1 + b)\ldots\left(1 + \frac{\theta}{k}\right).$$

Il ne faut pas oublier que, pour calculer un nombre avec n chiffres exacts, il faut connaître son logarithme avec $(n + 1)$ décimales.

Exemple IX. — *Calculer avec* 10 *décimales le nombre dont le logarithme est* 0,4971498726 9.

Le plus grand logarithme de la Table IX (colonne $\log a$), contenu dans le logarithme donné, est celui de 31; on retranche du reste les plus grands logarithmes de la Table X [colonne $\log(1 + \theta)$], jusqu'à ce que le dernier reste contienne au moins six zéros consécutifs. Ce reste, $0,0^6 86108$, est le logarithme de $1,0^5 19827$; et ce dernier nombre, multiplié par les nombres dont on a soustrait les logarithmes, donne pour produit

$$x = 3,1 \times 1,01 \times 1,0^2 3 \times 1,0^3 3 \times 1,0^4 8 \times 1,0^5 198270,$$

ou

$$x = 3,1415926535,$$

exact au dernier chiffre. Voici tout le calcul :

```
0,49714 98726 9 = log x
  49136 16938 3 = log 31
    578 81788 6
    432 13737 8 = log 1,01
    146 68050 8
    130 09330 2 = log 1,0²3
     16 58720 6
     13 02688 1 = log 1,0³3
      3 56032 5
      3 47421 7 = log 1,0⁴8
          8610 8
         -------
         19802 2
            23 0
             1 8
         -------
1,0⁵     19827 0 × 1,0⁴8
     38      1 6 × 1,0³3
            245 9
         -------
1,0³  38 20074 5 × 1,0²3
    3    11460 2
         -------
1,00338 31534 7 × 1,01
   1  3 38315 3
         -------
1,01341 69850 0 × 31
30,40250 95500
         -------
3,1415926535     = x (valeur de π).
```

Exemple X. — *Étant donné* $\log x = 5,99999922549$, *chercher* x.

Lorsque la *mantisse* d'un logarithme donné commence par plusieurs chiffres 9, on abrége considérablement le calcul en ajoutant à ce logarithme le plus petit logarithme de la Table X, qui excède le complément de la mantisse. En effet, ajouter le complément d'un logarithme revient à retrancher le logarithme lui-même; par conséquent, l'addition en question n'est autre chose que la soustraction du plus grand logarithme tabulaire. Ainsi, dans cet exemple, le complément de

la mantisse est $0,0^{6}77\ldots$: on prendra (Tab. X) le plus petit logarithme qui contienne ce complément ; ce sera

$$0,0^{6}86\ldots = \mathrm{Ct}\log 0,99998.$$

En ajoutant ce dernier complément au logarithme donné, on obtient pour somme $0,0^{7}9408$, de manière qu'au moyen d'une seule addition on a supprimé les sept premiers chiffres de la mantisse.

$$\begin{array}{rrl}
\log x = & 99999\ 92254\ 9 & \\
 & 8685\ 9 & = \mathrm{Ct}\log 1,0^{5}\bar{2} \\
\hline
 & 0,0^{7}\quad 9408 & \\
 & 21644 & \\
 & 18 & \\
\hline
 & 1,0^{6}\quad 21662 & \times 1,0^{5}\bar{2} \\
 & -2 & \\
\hline
x = & 999998,21662 &
\end{array}$$

Exemple XI. — *On place chaque année dix millions de francs ; combien produiront-ils au bout de* 99 *ans, à* 5 *pour* 100?

$$S = \frac{\alpha}{t}(r^{n}-1), \quad t = 0,05, \quad r = 1,05, \quad n = 99,$$

$$\alpha = 10000000, \quad \frac{\alpha}{t} = 200000000.$$

$$\begin{array}{rrl}
 & 0,02118929907 & = \log r \\
 & 211892990\ 7 & \\
\hline
 & 2\ 09774\ 06079\ 3 & = \log r^{99} \\
 & 7918\ 12460\ 5 & = \log 12 \\
 & 1855\ 93618\ 8 & \\
 & 1703\ 33393\ 0 & 1,04 \\
 & 152\ 60225\ 8 & \\
 & 130\ 09330\ 2 & 1,0^{2}3 \\
 & 22\ 50895\ 6 & \\
 & 21\ 70929\ 7 & 1,0^{3}5 \\
 & 79965\ 9 & \\
 & 43429\ 2 & 1,0^{4}1 \\
 & 36536\ 7 & \\
\hline
 & 82893\ 1 & \\
 & 12204 & \\
 & 154 & \\
\hline
1,0^{5} & 84128\ 9 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
1{,}0^{4} \quad 84128\,9 \times 1{,}0^{4}1 \times 1{,}0^{3}5 \\
\qquad 51 \qquad\quad 8 \\
\qquad\qquad\quad 92\,1 \\
\hline
\qquad 51\;84221\;8 \times 1{,}0^{2}3 \\
\quad 3 \quad 15552\;7 \\
\hline
\quad 351\;99774\;5 \times 1{,}04 \\
\;4\;\;14\;07991\;0 \\
\hline
1{,}04366\;07765\;5 \times 12 \\
\;20873\;21553\;1 \\
\hline
1{,}25239\;29318\;6 = r^{n},
\end{array}
$$

montant de 1^{fr} au bout de 99 ans; de là on déduit

$$\frac{\alpha}{t}(r^{n} - 1) = 2484\,785863\,7^{fr},$$

produit du placement de dix millions de francs pendant 99 ans.

TABLES LOGARITHMIQUES

POUR

LES CALCULS D'INTÉRÊT COMPOSÉ

ET D'ANNUITÉS,

PAR

FÉDOR THOMAN.

TABLE I

PRÉSENTANT LES LOGARITHMES DE r^n ET DE $\frac{1}{f_n(t)}$ OU $\log a$.

Cette Table contient, pour les taux indiqués au sommet de chaque page et pour toutes les valeurs entières et consécutives de n comprises entre 1 et 100 inclusivement :

1° Les logarithmes de r^n, c'est-à-dire les logarithmes du montant de 1^{fr} à la fin d'un nombre quelconque d'années, de 1 à 100 ans;

2° Les logarithmes de $\frac{1}{f_n(t)}$ ou $\log a$, c'est-à-dire les logarithmes de l'annuité a^{fr}, capable d'amortir un capital de 1^{fr} au bout d'un nombre quelconque d'années, de 1 à 100 ans.

3° Les mêmes logarithmes pour les taux 2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, 3 pour 100, et pour les valeurs de n comprises entre 101 et 200 ans inclusivement. (*Ces quatre Tables, dressées de la main de* FÉDOR THOMAN, *sont publiées pour la première fois*).

M. H. Charlon, qui a reproduit, dans son livre intitulé *Théorie mathématique des opérations financières*, les Tables logarithmiques dressées par Fédor Thoman pour les calculs d'intérêts composés et d'annuités, a bien voulu nous permettre d'utiliser les clichés de ces Tables. Mais nous devons prémunir le lecteur contre toute erreur, en lui faisant observer que M. Charlon a désigné par $\frac{1}{f_n(t)}$ l'annuité capable d'amortir un capital de 1^{fr} au bout d'un nombre quelconque d'années, annuité que nous avons toujours exprimée par a dans le cours de cet Ouvrage. Pour avoir le logarithme de cette annuité, il faudra donc le chercher, dans la Table suivante, dans la colonne C' $\log f_n(t)$.

$\frac{1}{2}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log $f_n(\frac{1}{2})$	C^t log $f_n(\frac{1}{2})$	log r^n	ANNÉES.
1	0,00216 61	0,00216 61	8,34757 77	0,11046 91	51
2	0,00433 21	9,70221 77	8,34018 12	0,11263 52	52
3	0,00649 82	9,52720 73	8,33294 45	0,11480 13	53
4	0,00866 42	9,40334 84	8,32586 16	0,11696 73	54
5	0,01083 03	9,30751 74	8,31892 67	0,11913 34	55
6	0,01299 64	9,22941 43	8,31213 45	0,12129 95	56
7	0,01516 24	9,16354 47	8,30547 99	0,12346 55	57
8	0,01732 85	9,10662 90	8,29895 81	0,12563 16	58
9	0,01949 46	9,05655 18	8,29256 45	0,12779 76	59
10	0,02166 06	9,01186 88	8,28629 48	0,12996 37	60
11	0,02382 67	8,97154 97	8,28014 49	0,13212 98	61
12	0,02599 27	8,93483 38	8,27411 08	0,13429 58	62
13	0,02815 88	8,90114 35	8,26818 87	0,13646 19	63
14	0,03032 49	8,87002 97	8,26237 52	0,13862 80	64
15	0,03249 09	8,84113 64	8,25666 70	0,14079 40	65
16	0,03465 70	8,81417 67	8,25106 05	0,14296 01	66
17	0,03682 30	8,78891 61	8,24555 30	0,14512 61	67
18	0,03898 91	8,76515 97	8,24014 12	0,14729 22	68
19	0,04115 52	8,74274 50	8,23482 25	0,14945 83	69
20	0,04332 12	8,72153 41	8,22959 42	0,15162 43	70
21	0,04548 73	8,70140 94	8,22445 35	0,15379 04	71
22	0,04765 34	8,68226 97	8,21939 82	0,15595 64	72
23	0,04981 94	8,66402 73	8,21442 58	0,15812 25	73
24	0,05198 55	8,64660 57	8,20953 39	0,16028 86	74
25	0,05415 15	8,62993 79	8,20472 05	0,16245 46	75
26	0,05631 76	8,61396 47	8,19998 33	0,16462 07	76
27	0,05848 37	8,59863 34	8,19532 05	0,16678 68	77
28	0,06064 97	8,58389 75	8,19073 01	0,16895 28	78
29	0,06281 58	8,56971 49	8,18621 02	0,17111 89	79
30	0,06498 19	8,55604 81	8,18175 89	0,17328 49	80
31	0,06714 79	8,54286 33	8,17737 46	0,17545 10	81
32	0,06931 40	8,53012 96	8,17305 56	0,17761 71	82
33	0,07148 00	8,51781 95	8,16880 04	0,17978 31	83
34	0,07364 61	8,50590 74	8,16460 73	0,18194 92	84
35	0,07581 22	8,49437 03	8,16047 48	0,18411 52	85
36	0,07797 82	8,48318 69	8,15640 16	0,18628 13	86
37	0,08014 43	8,47233 78	8,15238 31	0,18844 74	87
38	0,08231 03	8,46180 52	8,14842 72	0,19061 34	88
39	0,08447 64	8,45157 26	8,14452 35	0,19277 95	89
40	0,08664 25	8,44162 47	8,14067 37	0,19494 56	90
41	0,08880 85	8,43194 75	8,13687 67	0,19711 16	91
42	0,09097 46	8,42252 77	8,13313 12	0,19927 77	92
43	0,09314 07	8,41335 33	8,12943 61	0,20144 37	93
44	0,09530 67	8,40441 31	8,12579 04	0,20360 98	94
45	0,09747 28	8,39569 62	8,12219 29	0,20577 59	95
46	0,09963 88	8,38719 30	8,11864 27	0,20794 19	96
47	0,10180 49	8,37889 42	8,11513 86	0,21010 80	97
48	0,10397 10	8,37079 11	8,11167 99	0,21227 41	98
49	0,10613 70	8,36287 57	8,10826 55	0,21444 01	99
50	0,10830 31	8,35514 03	8,10489 45	0,21660 62	100
			7,69897 00		Perpét.

1 pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (1)	C^t log f_n (1)	log r^n	ANNÉES.
1	0,00432 14	0,00432 14	8,40013 73	0,22039 01	51
2	0,00864 27	9,70544 67	8,39368 10	0,22471 14	52
3	0,01296 41	9,53150 71	8,38738 20	0,22903 28	53
4	0,01728 55	9,40871 66	8,38123 39	0,23335 42	54
5	0,02160 69	9,31395 11	8,37523 13	0,23767 56	55
6	0,02592 82	9,23691 09	8,36936 88	0,24199 69	56
7	0,03024 96	9,17210 14	8,36364 13	0,24631 83	57
8	0,03457 10	9,11624 34	8,35804 40	0,25063 97	58
9	0,03889 24	9,06722 10	8,35257 23	0,25496 11	59
10	0,04321 37	9,02359 02	8,34722 17	0,25928 24	60
11	0,04753 51	8,98432 06	8,34198 82	0,26360 38	61
12	0,05185 65	8,94865 15	8,33686 80	0,26792 52	62
13	0,05617 79	8,91600 53	8,33185 73	0,27224 65	63
14	0,06049 92	8,88593 30	8,32695 27	0,27656 79	64
15	0,06482 06	8,85807 85	8,32215 04	0,28088 93	65
16	0,06914 20	8,83215 49	8,31744 74	0,28521 07	66
17	0,07346 34	8,80792 76	8,31284 06	0,28953 20	67
18	0,07778 47	8,78520 21	8,30832 70	0,29385 34	68
19	0,08210 61	8,76381 54	8,30390 41	0,29817 48	69
20	0,08642 75	8,74362 98	8,29956 87	0,30249 62	70
21	0,09074 88	8,72452 77	8,29531 85	0,30681 75	71
22	0,09507 02	8,70640 81	8,29115 10	0,31113 89	72
23	0,09939 16	8,68918 31	8,28706 38	0,31546 03	73
24	0,10371 30	8,67277 62	8,28305 45	0,31978 17	74
25	0,10803 43	8,65712 04	8,27912 12	0,32410 30	75
26	0,11235 57	8,64215 65	8,27526 16	0,32842 44	76
27	0,11667 71	8,62783 20	8,27147 36	0,33274 58	77
28	0,12099 85	8,61410 00	8,26795 54	0,33706 72	78
29	0,12531 98	8,60091 87	8,26410 51	0,34138 85	79
30	0,12964 12	8,58825 06	8,26052 10	0,34570 99	80
31	0,13396 26	8,57606 17	8,25700 14	0,35003 13	81
32	0,13828 40	8,56432 14	8,25354 42	0,35435 27	82
33	0,14260 53	8,55300 19	8,25014 80	0,35867 40	83
34	0,14692 67	8,54207 78	8,24681 18	0,36299 54	84
35	0,15124 81	8,53152 59	8,24353 36	0,36731 68	85
36	0,15556 95	8,52132 52	8,24031 21	0,37163 81	86
37	0,15989 08	8,51145 62	8,23714 56	0,37595 95	87
38	0,16421 22	8,50190 10	8,23403 34	0,38028 09	88
39	0,16853 36	8,49264 30	8,23097 39	0,38460 23	89
40	0,17285 50	8,48366 72	8,22796 52	0,38892 36	90
41	0,17717 63	8,47495 92	8,22500 72	0,39324 50	91
42	0,18149 77	8,46650 62	8,22209 81	0,39756 64	92
43	0,18581 91	8,45829 59	8,21923 68	0,40188 78	93
44	0,19014 04	8,45031 70	8,21642 22	0,40620 91	94
45	0,19446 18	8,44255 89	8,21365 35	0,41053 05	95
46	0,19878 32	8,43501 17	8,21092 93	0,41485 19	96
47	0,20310 46	8,42766 63	8,20824 89	0,41917 33	97
48	0,20742 59	8,42051 42	8,20561 12	0,42349 46	98
49	0,21174 73	8,41354 69	8,20301 53	0,42781 60	99
50	0,21606 87	8,40675 69	8,20046 04	0,43213 74	100
			8,00000 00		Perpét.

1 $\frac{1}{2}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log $f_n(1\frac{1}{2})$	C^t log $f_n(1\frac{1}{2})$	log r^n	ANNÉES.
1	0,00646 60	0,00646 60	8,45016 73	0,32976 82	51
2	0,01293 21	9,70865 71	8,44455 80	0,33623 42	52
3	0,01939 81	9,53577 87	8,43910 15	0,34270 02	53
4	0,02586 42	9,41404 49	8,43379 19	0,34916 63	54
5	0,03233 02	9,32033 19	8,42862 34	0,35563 23	55
6	0,03879 63	9,24433 95	8,42359 09	0,36209 84	56
7	0,04526 23	9,18057 36	8,41868 90	0,36856 44	57
8	0,05172 83	9,12575 45	8,41391 32	0,37503 04	58
9	0,05819 44	9,07776 69	8,40925 87	0,38149 65	59
10	0,06466 04	9,03516 62	8,40472 13	0,38796 25	60
11	0,07112 65	8,99692 23	8,40029 69	0,39442 86	61
12	0,07759 25	8,96227 45	8,39598 15	0,40089 46	62
13	0,08405 85	8,93064 52	8,39177 13	0,40736 07	63
14	0,09052 46	8,90158 54	8,38766 27	0,41382 67	64
15	0,09699 06	8,87473 89	8,38365 27	0,42029 27	65
16	0,10345 67	8,84981 90	8,37973 78	0,42675 88	66
17	0,10992 27	8,82659 08	8,37591 50	0,43322 48	67
18	0,11638 88	8,80486 00	8,37218 13	0,43969 09	68
19	0,12285 48	8,78446 37	8,36853 40	0,44615 69	69
20	0,12932 08	8,76526 42	8,36497 01	0,45262 30	70
21	0,13578 69	8,74714 37	8,36148 74	0,45908 90	71
22	0,14225 29	8,73000 10	8,35808 32	0,46555 50	72
23	0,14871 90	8,71374 88	8,35475 53	0,47202 11	73
24	0,15518 50	8,69831 03	8,35150 12	0,47848 71	74
25	0,16165 11	8,68361 84	8,34831 89	0,48495 32	75
26	0,16811 71	8,66961 41	8,34520 62	0,49141 92	76
27	0,17458 31	8,65624 46	8,34216 13	0,49788 52	77
28	0,18104 92	8,64346 33	8,33918 21	0,50435 13	78
29	0,18751 52	8,63122 84	8,33626 68	0,51081 73	79
30	0,19398 13	8,61950 22	8,33341 34	0,51728 34	80
31	0,20044 73	8,60825 10	8,33062 05	0,52374 94	81
32	0,20691 34	8,59744 40	8,32788 65	0,53021 55	82
33	0,21337 94	8,58705 33	8,32520 95	0,53668 15	83
34	0,21984 54	8,57705 37	8,32258 81	0,54314 75	84
35	0,22631 15	8,56742 20	8,32002 07	0,54961 36	85
36	0,23277 75	8,55813 71	8,31750 61	0,55607 96	86
37	0,23924 36	8,54917 95	8,31504 28	0,56254 57	87
38	0,24570 96	8,54053 14	8,31262 96	0,56901 17	88
39	0,25217 56	8,53217 62	8,31026 49	0,57547 78	89
40	0,25864 17	8,52409 87	8,30794 79	0,58194 38	90
41	0,26510 77	8,51628 49	8,30567 71	0,58840 98	91
42	0,27157 38	8,50872 18	8,30345 14	0,59487 59	92
43	0,27803 98	8,50139 68	8,30126 97	0,60134 19	93
44	0,28450 59	8,49429 90	8,29913 08	0,60780 80	94
45	0,29097 19	8,48741 78	8,29703 39	0,61427 40	95
46	0,29743 79	8,48074 32	8,29497 78	0,62074 01	96
47	0,30390 40	8,47426 61	8,29296 14	0,62720 61	97
48	0,31037 00	8,46797 79	8,29098 41	0,63367 21	98
49	0,31683 61	8,46187 03	8,28904 46	0,64013 82	99
50	0,32330 21	8,45593 57	8,28714 24	0,64660 42	100
			8,17609 13		Perpét.

1 $\frac{5}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (1 $\frac{5}{8}$)	C^t log f_n (1 $\frac{5}{8}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,00700 06	0,00700 06	8,46228 76	0,35702 85	51
2	0,01400 11	9,70945 67	8,45687 59	0,36402 90	52
3	0,02100 17	9,53684 22	8,45161 58	0,37102 96	53
4	0,02800 22	9,41537 09	8,44650 12	0,37803 02	54
5	0,03500 28	9,32191 89	8,44152 64	0,38503 07	55
6	0,04200 34	9,24618 62	8,43668 64	0,39203 13	56
7	0,04900 39	9,18267 86	8,43197 57	0,39903 18	57
8	0,05600 45	9,12811 63	8,42738 97	0,40603 24	58
9	0,06300 50	9,08038 42	8,42292 39	0,41303 30	59
10	0,07000 56	9,03803 76	8,41857 38	0,42003 35	60
11	0,07700 61	9,00004 66	8,41433 55	0,42703 41	61
12	0,08400 67	8,96565 02	8,41020 47	0,43403 46	62
13	0,09100 73	8,93427 09	8,40617 81	0,44103 52	63
14	0,09800 78	8,90545 97	8,40225 20	0,44803 58	64
15	0,10500 84	8,87886 05	8,39842 30	0,45503 63	65
16	0,11200 89	8,85418 64	8,39468 79	0,46203 69	66
17	0,11900 95	8,83120 29	8,39104 37	0,46903 74	67
18	0,12601 01	8,80971 52	8,38748 73	0,47603 80	68
19	0,13301 06	8,78956 07	8,38401 59	0,48303 85	69
20	0,14001 12	8,77060 16	8,38062 69	0,49003 91	70
21	0,14701 17	8,75272 00	8,37731 79	0,49703 97	71
22	0,15401 23	8,73581 51	8,37408 61	0,50404 02	72
23	0,16101 28	8,71979 91	8,37092 93	0,51104 08	73
24	0,16801 34	8,70459 55	8,36784 51	0,51804 13	74
25	0,17501 40	8,69013 73	8,36483 15	0,52504 19	75
26	0,18201 45	8,67636 51	8,36188 64	0,53204 25	76
27	0,18901 51	8,66322 65	8,35900 78	0,53904 30	77
28	0,19601 56	8,65067 47	8,35619 36	0,54604 36	78
29	0,20301 62	8,63866 80	8,35344 23	0,55304 41	79
30	0,21001 68	8,62716 86	8,35075 18	0,56004 47	80
31	0,21701 73	8,61614 29	8,34812 05	0,56704 52	81
32	0,22401 79	8,60555 99	8,34554 67	0,57404 58	82
33	0,23101 84	8,59539 20	8,34302 89	0,58104 64	83
34	0,23801 90	8,58561 38	8,34056 55	0,58804 69	84
35	0,24501 96	8,57620 21	8,33815 50	0,59504 75	85
36	0,25202 01	8,56713 59	8,33579 60	0,60204 80	86
37	0,25902 07	8,55839 57	8,33348 74	0,60904 86	87
38	0,26602 12	8,54996 37	8,33122 74	0,61604 92	88
39	0,27302 18	8,54182 32	8,32901 50	0,62304 97	89
40	0,28002 23	8,53395 91	8,32684 89	0,63005 03	90
41	0,28702 29	8,52635 74	8,32472 80	0,63705 08	91
42	0,29402 35	8,51900 48	8,32265 12	0,64405 14	92
43	0,30102 40	8,51188 94	8,32061 72	0,65105 19	93
44	0,30802 46	8,50499 97	8,31862 48	0,65805 25	94
45	0,31502 51	8,49832 51	8,31667 34	0,66505 31	95
46	0,32202 57	8,49185 59	8,31476 15	0,67205 36	96
47	0,32902 63	8,48558 30	8,31288 83	0,67905 42	97
48	0,33602 68	8,47949 75	8,31105 32	0,68605 47	98
49	0,34302 74	8,47359 15	8,30925 47	0,69305 53	99
50	0,35002 79	8,46785 72	8,30749 23	0,70005 59	100
			8,21085 34		Perpét.

1 $\frac{3}{4}$ pour 100.

ANNÉES.	$\log r^n$	$C^t \log f_n (1\frac{3}{4})$	$C^t \log f_n (1\frac{3}{4})$	$\log r^n$	ANNÉES.
1	0,00753 44	0,00753 44	8,47425 55	0,38425 53	51
2	0,01506 88	9,71025 53	8,46903 59	0,39178 97	52
3	0,02260 33	9,53790 40	8,46396 64	0,39932 41	53
4	0,03013 77	9,41669 43	8,45904 12	0,40685 86	54
5	0,03767 21	9,32350 26	8,45425 46	0,41439 30	55
6	0,04520 65	9,24802 86	8,44960 11	0,42192 74	56
7	0,05274 09	9,18477 83	8,44507 55	0,42946 18	57
8	0,06027 53	9,13047 18	8,44067 34	0,43699 62	58
9	0,06780 98	9,08299 40	8,43639 01	0,44453 07	59
10	0,07534 42	9,04090 03	8,43222 12	0,45206 51	60
11	0,08287 86	9,00316 04	8,42816 25	0,45959 95	61
12	0,09041 30	8,96901 39	8,42421 04	0,46713 39	62
13	0,09794 74	8,93788 29	8,42036 10	0,47466 83	63
14	0,10548 19	8,90931 86	8,41661 07	0,48220 27	64
15	0,11301 63	8,88296 48	8,41295 62	0,48973 72	65
16	0,12055 07	8,85853 47	8,40939 42	0,49727 16	66
17	0,12808 51	8,83579 35	8,40592 18	0,50480 60	67
18	0,13561 95	8,81454 67	8,40253 58	0,51234 04	68
19	0,14315 39	8,79463 17	8,39923 37	0,51987 48	69
20	0,15068 84	8,77591 04	8,39601 25	0,52740 93	70
21	0,15822 28	8,75826 56	8,39287 02	0,53494 37	71
22	0,16575 72	8,74159 57	8,38980 37	0,54247 81	72
23	0,17329 16	8,72581 33	8,38681 08	0,55001 25	73
24	0,18082 60	8,71084 18	8,38388 95	0,55754 69	74
25	0,18836 04	8,69661 43	8,38103 74	0,56508 13	75
26	0,19589 49	8,68307 13	8,37825 25	0,57261 58	76
27	0,20342 93	8,67016 03	8,37553 26	0,58015 02	77
28	0,21096 37	8,65783 49	8,37287 63	0,58768 46	78
29	0,21849 81	8,64605 30	8,37028 14	0,59521 90	79
30	0,22603 25	8,63477 70	8,36774 59	0,60275 34	80
31	0,23356 70	8,62397 31	8,36526 83	0,61028 78	81
32	0,24110 14	8,61361 06	8,36284 73	0,61782 23	82
33	0,24863 58	8,60366 17	8,36048 09	0,62535 67	83
34	0,25617 02	8,59410 10	8,35816 78	0,63289 11	84
35	0,26370 46	8,58490 54	8,35590 63	0,64042 55	85
36	0,27123 90	8,57605 41	8,35369 49	0,64795 99	86
37	0,27877 35	8,56752 71	8,35153 28	0,65549 44	87
38	0,28630 79	8,55930 68	8,34941 82	0,66302 88	88
39	0,29384 23	8,55137 67	8,34734 99	0,67056 32	89
40	0,30137 67	8,54372 16	8,34532 67	0,67809 76	90
41	0,30891 11	8,53632 73	8,34334 75	0,68563 20	91
42	0,31644 56	8,52918 09	8,34141 12	0,69316 64	92
43	0,32398 00	8,52227 03	8,33951 65	0,70070 09	93
44	0,33151 44	8,51558 38	8,33766 23	0,70823 53	94
45	0,33904 88	8,50911 12	8,33584 77	0,71576 97	95
46	0,34658 32	8,50284 25	8,33407 18	0,72330 41	96
47	0,35411 76	8,49676 86	8,33233 34	0,73083 85	97
48	0,36165 21	8,49088 08	8,33063 19	0,73837 30	98
49	0,36918 65	8,48517 10	8,32896 56	0,74590 74	99
50	0,37672 09	8,47963 16	8,32733 42	0,75344 18	100
			8,24303 80		Perpét.

$1\frac{7}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	$\log r^n$	$C^t \log f_n (1\frac{7}{8})$	$C^t \log f_n (1\frac{7}{8})$	$\log r^n$	ANNÉES.
1	0,00806 76	0,00806 76	8,48607 21	0,41144 87	51
2	0,01613 52	9,71105 27	8,48103 92	0,41951 63	52
3	0,02420 29	9,53896 40	8,47615 50	0,42758 39	53
4	0,03227 05	9,41801 54	8,47141 35	0,43565 16	54
5	0,04033 81	9,32508 31	8,46680 90	0,44371 92	55
6	0,04840 57	9,24986 69	8,46233 64	0,45178 68	56
7	0,05647 34	9,18687 27	8,45799 04	0,45985 44	57
8	0,06454 10	9,13282 10	8,45376 62	0,46792 21	58
9	0,07260 86	9,08559 62	8,44965 94	0,47598 97	59
10	0,08067 62	9,04375 38	8,44566 57	0,48405 73	60
11	0,08874 38	9,00626 40	8,44178 08	0,49212 49	61
12	0,09681 15	8,97236 58	8,43800 08	0,50019 25	62
13	0,10487 91	8,94148 14	8,43432 22	0,50826 02	63
14	0,11294 67	8,91316 21	8,43074 13	0,51632 78	64
15	0,12101 43	8,88705 19	8,42725 47	0,52439 54	65
16	0,12908 19	8,86286 36	8,42385 95	0,53246 30	66
17	0,13714 96	8,84036 28	8,42055 23	0,54053 07	67
18	0,14521 72	8,81935 49	8,41733 03	0,54859 83	68
19	0,15328 48	8,79967 69	8,41419 08	0,55666 59	69
20	0,16135 24	8,78119 14	8,41113 08	0,56473 35	70
21	0,16942 01	8,76378 05	8,40814 80	0,57280 11	71
22	0,17748 77	8,74734 31	8,40524 00	0,58086 88	72
23	0,18555 53	8,73179 16	8,40240 42	0,58893 64	73
24	0,19362 29	8,71704 94	8,39963 85	0,59700 40	74
25	0,20169 05	8,70304 95	8,39694 07	0,60507 16	75
26	0,20975 82	8,68973 27	8,39430 88	0,61313 92	76
27	0,21782 58	8,67704 65	8,39174 08	0,62120 69	77
28	0,22589 34	8,66494 41	8,38923 47	0,62927 45	78
29	0,23396 10	8,65338 36	8,38678 87	0,63734 21	79
30	0,24202 87	8,64232 76	8,38440 11	0,64540 97	80
31	0,25009 63	8,63174 21	8,38207 02	0,65347 74	81
32	0,25816 39	8,62159 65	8,37979 41	0,66154 50	82
33	0,26623 15	8,61186 28	8,37757 16	0,66961 26	83
34	0,27429 91	8,60251 60	8,37540 09	0,67768 02	84
35	0,28236 68	8,59353 27	8,37328 06	0,68574 78	85
36	0,29043 44	8,58489 19	8,37120 95	0,69381 55	86
37	0,29850 20	8,57657 41	8,36918 60	0,70188 31	87
38	0,30656 96	8,56856 14	8,36720 89	0,70995 07	88
39	0,31463 72	8,56083 74	8,36527 70	0,71801 83	89
40	0,32270 49	8,55338 71	8,36338 88	0,72608 60	90
41	0,33077 25	8,54619 59	8,36154 34	0,73415 36	91
42	0,33884 01	8,53925 09	8,35973 95	0,74222 12	92
43	0,34690 77	8,53254 01	8,35797 61	0,75028 88	93
44	0,35497 54	8,52605 23	8,35625 21	0,75835 64	94
45	0,36304 30	8,51977 69	8,35456 66	0,76642 41	95
46	0,37111 06	8,51370 37	8,35291 82	0,77449 17	96
47	0,37917 82	8,50782 39	8,35130 63	0,78255 93	97
48	0,38724 58	8,50212 85	8,34972 98	0,79062 69	98
49	0,39531 35	8,49660 98	8,34818 80	0,79869 45	99
50	0,40338 11	8,49126 01	8,34667 98	0,80676 22	100
			8,27300 13		Perpét.

2 pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (2)	C^t log f_n (2)	log r^n	ANNÉES
1	0,00860 02	0,00860 02	8,49773 88	0,43860 88	51
2	0,01720 03	9,71184 90	8,49288 73	0,44720 89	52
3	0,02580 05	9,54002 23	8,48818 28	0,45580 91	53
4	0,03440 07	9,41933 40	8,48361 96	0,46440 93	54
5	0,04300 09	9,32666 02	8,47919 18	0,47300 94	55
6	0,05160 10	9,25170 10	8,47489 44	0,48160 96	56
7	0,06020 12	9,18896 21	8,47072 20	0,49020 98	57
8	0,06880 14	9,13516 38	8,46667 00	0,49881 00	58
9	0,07740 15	9,08819 08	8,46273 38	0,50741 01	59
10	0,08600 17	9,04659 87	8,45890 93	0,51601 03	60
11	0,09460 19	9,00935 71	8,45519 19	0,52461 05	61
12	0,10320 21	8,97570 56	8,45157 82	0,53321 07	62
13	0,11180 22	8,94506 63	8,44806 42	0,54181 08	63
14	0,12040 24	8,91699 05	8,44464 66	0,55041 10	64
15	0,12900 26	8,89112 17	8,44132 18	0,55901 12	65
16	0,13760 27	8,86717 35	8,43808 68	0,56761 13	66
17	0,14620 29	8,84491 09	8,43493 85	0,57621 15	67
18	0,15480 31	8,82413 95	8,43187 38	0,58481 17	68
19	0,16340 33	8,80469 66	8,42889 01	0,59341 19	69
20	0,17200 34	8,78644 42	8,42598 47	0,60201 20	70
21	0,18060 36	8,76926 48	8,42315 50	0,61061 22	71
22	0,18920 38	8,75305 73	8,42039 86	0,61921 24	72
23	0,19780 40	8,73773 40	8,41771 31	0,62781 25	73
24	0,20640 41	8,72321 83	8,41509 63	0,63641 27	74
25	0,21500 43	8,70944 33	8,41254 59	0,64501 29	75
26	0,22360 45	8,69634 97	8,41006 01	0,65361 31	76
27	0,23220 46	8,68388 50	8,40763 67	0,66221 32	77
28	0,24080 48	8,67200 24	8,40527 39	0,67081 34	78
29	0,24940 50	8,66066 02	8,40296 99	0,67941 36	79
30	0,25800 52	8,64982 07	8,40072 29	0,68801 37	80
31	0,26660 53	8,63945 01	8,39853 11	0,69661 39	81
32	0,27520 55	8,62951 77	8,39639 29	0,70521 41	82
33	0,28380 57	8,61999 58	8,39430 69	0,71381 43	83
34	0,29240 58	8,61085 89	8,39227 14	0,72241 44	84
35	0,30100 60	8,60208 40	8,39028 51	0,73101 46	85
36	0,30960 62	8,59364 99	8,38834 65	0,73961 48	86
37	0,31820 64	8,58553 72	8,38645 44	0,74821 49	87
38	0,32680 65	8,57772 80	8,38460 72	0,75681 51	88
39	0,33540 67	8,57020 59	8,38280 38	0,76541 53	89
40	0,34400 69	8,56295 56	8,38104 31	0,77401 55	90
41	0,35260 70	8,55596 32	8,37932 39	0,78261 56	91
42	0,36120 72	8,54921 53	8,37764 48	0,79121 58	92
43	0,36980 74	8,54270 02	8,37600 50	0,79981 60	93
44	0,37840 76	8,53640 61	8,37440 34	0,80841 61	94
45	0,38700 77	8,53032 30	8,37283 88	0,81701 63	95
46	0,39560 79	8,52444 06	8,37131 04	0,82561 65	96
47	0,40420 81	8,51874 97	8,36981 72	0,83421 67	97
48	0,41280 82	8,51324 20	8,36835 82	0,84281 68	98
49	0,42140 84	8,50790 93	8,36693 25	0,85141 70	99
50	0,43000 86	8,50274 40	8,36553 93	0,86001 72	100
			8,30103 00		Perpét.

$2\frac{1}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	$\log r^n$	$C^t \log f_n(2\frac{1}{8})$	$C^t \log f_n(2\frac{1}{8})$	$\log r^n$	ANNÉES.
1	0,00913 21	0,00913 21	8,50925 70	0,46573 55	51
2	0,01826 41	9,71264 41	8,50458 14	0,47486 76	52
3	0,02739 62	9,54107 89	8,50005 14	0,48399 97	53
4	0,03652 83	9,42065 01	8,49566 10	0,49313 18	54
5	0,04566 03	9,32823 42	8,49140 45	0,50226 38	55
6	0,05479 24	9,25353 10	8,48727 66	0,51139 59	56
7	0,06392 45	9,19104 62	8,48327 23	0,52052 80	57
8	0,07305 66	9,13750 04	8,47938 67	0,52966 00	58
9	0,08218 86	9,09077 79	8,47561 55	0,53879 21	59
10	0,09132 07	9,04943 46	8,47195 41	0,54792 42	60
11	0,10045 28	9,01244 01	8,46839 85	0,55705 62	61
12	0,10958 48	8,97903 37	8,46494 50	0,56618 83	62
13	0,11871 69	8,94863 78	8,46158 98	0,57532 04	63
14	0,12784 90	8,92080 35	8,45832 92	0,58445 24	64
15	0,13698 10	8,89517 46	8,45516 00	0,59358 45	65
16	0,14611 31	8,87146 43	8,45207 90	0,60271 66	66
17	0,15524 52	8,84943 79	8,44908 33	0,61184 87	67
18	0,16437 73	8,82890 09	8,44616 96	0,62098 07	68
19	0,17350 93	8,80969 06	3,44333 55	0,63011 28	69
20	0,18264 14	8,79166 90	8,44057 81	0,63924 49	70
21	0,19177 35	8,77471 88	8,43789 50	0,64837 69	71
22	0,20090 55	8,75873 85	8,43528 36	0,65750 90	72
23	0,21003 76	8,74364 08	8,43274 17	0,66664 11	73
24	0,21916 97	8,72934 89	8,43026 70	0,67577 31	74
25	0,22830 17	8,71579 57	8,42785 75	0,68490 52	75
26	0,23743 38	8,70292 24	8,42551 09	0,69403 73	76
27	0,24656 59	8,69067 61	8,42322 54	0,70316 94	77
28	0,25569 79	8,67901 02	8,42099 91	0,71230 14	78
29	0,26483 00	8,66788 30	8,41883 00	0,72143 35	79
30	0,27396 21	8,65725 67	8,41671 66	0,73056 56	80
31	0,28309 42	8,64709 75	8,41465 70	0,73969 76	81
32	0,29222 62	8,63737 48	8,41264 97	0,74882 97	82
33	0,30135 83	8,62806 09	8,41069 32	0,75796 18	83
34	0,31049 04	8,61913 02	8,40878 59	0,76709 38	84
35	0,31962 24	8,61056 00	8,40692 63	0,77622 59	85
36	0,32875 45	8,60232 86	8,40511 31	0,78535 80	86
37	0,33718 66	8,59441 70	8,40334 50	0,79449 00	87
38	0,34701 86	8,58680 73	8,40162 05	0,80362 21	88
39	0,35615 07	8,57948 28	8,39993 86	0,81275 42	89
40	0,36528 28	8,57242 85	8,39829 79	0,82188 63	90
41	0,37441 48	8,56563 03	8,39669 74	0,83101 83	91
42	0,38354 69	8,55907 50	8,39513 59	0,84015 04	92
43	0,39267 90	8,55275 08	8,39361 23	0,84928 25	93
44	0,40181 11	8,54664 60	8,39212 54	0,85841 45	94
45	0,41094 31	8,54075 03	8,39067 46	0,86754 66	95
46	0,42007 52	8,53505 38	8,38925 85	0,87667 87	96
47	0,42920 73	8,52954 74	8,38787 63	0,88581 07	97
48	0,43833 93	8,52422 22	8,38652 73	0,89494 28	98
49	0,44747 14	8,51907 05	8,38521 04	0,90407 49	99
50	0,45660 35	8,51408 44	8,38392 46	0,91320 70	100
			8,32735 89		Perpét.

$2\frac{1}{4}$ pour 100.

ANNÉES.	$\log r^n$	$C^t \log f_n (2\frac{1}{4})$	$C^t \log f_n (2\frac{1}{4})$	$\log r^n$	ANNÉES.
1	0,00966 33	0,00960 33	8,52062 79	0,49282 92	51
2	0,01932 66	9,71343 81	8,51612 32	0,50249 25	52
3	0,02899 00	9,54213 37	8,51176 23	0,51215 58	53
4	0,03865 33	9,42196 39	8,50753 94	0,52181 91	54
5	0,04831 66	9,32980 50	8,50344 87	0,53148 24	55
6	0,05797 99	9,25535 68	8,49948 50	0,54114 57	56
7	0,06764 32	9,19312 53	8,49564 32	0,55080 91	57
8	0,07730 65	9,13983 07	8,49191 85	0,56047 24	58
9	0,08696 99	9,09335 76	8,48830 64	0,57013 57	59
10	0,09663 32	9,05226 17	8,48480 26	0,57979 90	60
11	0,10629 65	9,01551 27	8,48140 31	0,58946 23	61
12	0,11595 98	8,98235 00	8,47810 38	0,59912 56	62
13	0,12562 31	8,95219 58	8,47490 13	0,60878 90	63
14	0,13528 64	8,92460 13	8,47179 18	0,61845 23	64
15	0,14494 98	8,89921 03	8,46877 22	0,62811 56	65
16	0,15461 31	8,87573 61	8,46583 92	0,63777 89	66
17	0,16427 64	8,85394 38	8,46298 99	0,64744 22	67
18	0,17393 97	8,83363 92	8,46022 11	0,65710 55	68
19	0,18360 30	8,81465 92	8,45753 02	0,66676 89	69
20	0,19326 63	8,79686 61	8,45491 46	0,67643 22	70
21	0,20292 97	8,78014 23	8,45237 16	0,68609 55	71
22	0,21259 30	8,76438 69	8,44989 91	0,69575 88	72
23	0,22225 63	8,74951 19	8,44749 44	0,70542 21	73
24	0,23191 96	8,73544 10	8,44515 54	0,71508 54	74
25	0,24158 29	8,72210 71	8,44288 00	0,72474 88	75
26	0,25124 62	8,70945 09	8,44066 62	0,73441 21	76
27	0,26090 96	8,69742 01	8,43851 20	0,74407 54	77
28	0,27057 29	8,68596 79	8,43641 53	0,75373 87	78
29	0,28023 62	8,67505 22	8,43437 47	0,76340 20	79
30	0,28989 95	8,66463 57	8,43238 82	0,77306 53	80
31	0,29956 28	8,65468 47	8,43045 41	0,78272 87	81
32	0,30922 61	8,64516 82	8,42857 08	0,79239 20	82
33	0,31888 95	8,63605 86	8,42673 69	0,80205 53	83
34	0,32855 28	8,62733 05	8,42495 08	0,81171 86	84
35	0,33821 61	8,61896 08	8,42321 10	0,82138 19	85
36	0,34787 94	8,61092 85	8,42151 63	0,83104 52	86
37	0,35754 27	8,60321 40	8,41986 53	0,84070 86	87
38	0,36720 60	8,59579 96	8,41825 66	0,85037 19	88
39	0,37686 94	8,58866 87	8,41668 90	0,86003 52	89
40	0,38653 27	8,58180 61	8,41516 13	0,86969 85	90
41	0,39619 60	8,57519 79	8,41367 26	0,87936 18	91
42	0,40585 93	8,56883 09	8,41222 14	0,88902 51	92
43	0,41552 26	8,56269 29	8,41080 69	0,89868 85	93
44	0,42518 59	8,55677 28	8,40942 79	0,90835 18	94
45	0,43484 93	8,55106 01	8,40808 36	0,91801 51	95
46	0,44451 26	8,54554 47	8,40677 28	0,92767 84	96
47	0,45417 59	8,54021 77	8,40549 46	0,93734 17	97
48	0,46383 92	8,53507 03	8,40424 83	0,94700 50	98
49	0,47350 25	8,53009 45	8,40303 28	0,95666 84	99
50	0,48316 58	8,52528 28	8,40184 73	0,96633 17	100
			8,35218 25		Perpét.

2 $\frac{3}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n ($2\frac{3}{8}$)	C^t log f_n ($2\frac{3}{8}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01019 39	0,01019 39	8,53185 29	0,51988 97	51
2	0,02038 78	9,71423 09	8,52751 40	0,53008 36	52
3	0,03058 17	9,54318 69	8,52331 72	0,54027 75	53
4	0,04077 57	9,42327 52	8,51925 65	0,55047 14	54
5	0,05096 96	9,33137 25	8,51532 64	0,56066 53	55
6	0,06116 35	9,25717 86	8,51152 15	0,57085 92	56
7	0,07135 74	9,19519 91	8,50783 67	0,58105 31	57
8	0,08155 13	9,14215 48	8,50426 73	0,59124 71	58
9	0,09174 52	9,09592 97	8,50080 89	0,60144 10	59
10	0,10193 91	9,05508 01	8,49745 71	0,61163 49	60
11	0,11213 31	9,01857 51	8,49420 78	0,62182 88	61
12	0,12232 70	8,98565 46	8,49105 72	0,63202 27	62
13	0,13252 09	8,95574 04	8,48800 16	0,64221 66	63
14	0,14271 48	8,92838 40	8,48503 75	0,65241 05	64
15	0,15290 87	8,90322 91	8,48216 16	0,66260 45	65
16	0,16310 26	8,87998 90	8,47937 06	0,67279 84	66
17	0,17329 66	8,85842 88	8,47666 16	0,68299 23	67
18	0,18349 05	8,83835 42	8,47403 17	0,69318 62	68
19	0,19368 44	8,81960 24	8,47147 80	0,70338 01	69
20	0,20387 83	8,80203 55	8,46899 81	0,71357 40	70
21	0,21407 22	8,78553 60	8,46658 92	0,72376 80	71
22	0,22426 61	8,77000 26	8,46424 91	0,73396 19	72
23	0,23446 00	8,75534 79	8,46197 53	0,74415 58	73
24	0,24465 40	8,74149 52	8,45976 59	0,75434 97	74
25	0,25484 79	8,72837 75	8,45761 83	0,76454 36	75
26	0,26504 18	8,71593 57	8,45553 08	0,77473 75	76
27	0,27523 57	8,70411 73	8,45350 14	0,78493 14	77
28	0,28542 96	8,69287 54	8,45152 83	0,79512 54	78
29	0,29562 35	8,68216 82	8,44960 94	0,80531 93	79
30	0,30581 74	8,67195 84	8,44774 23	0,81551 32	80
31	0,31601 14	8,66221 19	8,44592 81	0,82570 71	81
32	0,32620 53	8,65289 81	8,44416 24	0,83590 10	82
33	0,33639 92	8,64398 93	8,44244 45	0,84609 49	83
34	0,34659 31	8,63546 00	8,44077 30	0,85628 88	84
35	0,35678 70	8,62728 74	8,43914 65	0,86648 28	85
36	0,36698 09	8,61945 00	8,43756 35	0,87667 67	86
37	0,37717 48	8,61192 87	8,43602 29	0,88687 06	87
38	0,38736 88	8,60470 55	8,43452 32	0,89706 45	88
39	0,39756 27	8,59776 41	8,43306 33	0,90725 84	89
40	0,40775 66	8,59108 91	8,43164 21	0,91745 23	90
41	0,41795 05	8,58466 66	8,43025 82	0,92764 62	91
42	0,42814 44	8,57848 34	8,42891 07	0,93784 02	92
43	0,43833 83	8,57252 74	8,42759 85	0,94803 41	93
44	0,44853 23	8,56678 76	8,42632 05	0,95822 80	94
45	0,45872 62	8,56125 31	8,42507 58	0,96842 19	95
46	0,46892 01	8,55591 44	8,42386 35	0,97861 58	96
47	0,47911 40	8,55076 19	8,42268 24	0,98880 97	97
48	0,48930 79	8,54578 74	8,42153 20	0,99900 37	98
49	0,49950 18	8,54098 27	8,42041 11	1,00919 76	99
50	0,50969 57	8,53634 03	8,41931 90	1,01939 15	100
			8,37566 36		Perpét.

2 $\frac{1}{2}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log $f_n(2\frac{1}{2})$	C^t log $f_n(2\frac{1}{2})$	log r^n	ANNÉES.
1	0,01072 39	0,01072 39	8,54293 36	0,54691 71	51
2	0,02144 77	9,71502 27	8,53875 55	0,55764 10	52
3	0,03217 16	9,54423 83	8,53471 76	0,56836 49	53
4	0,04289 55	9,42458 42	8,53081 40	0,57908 87	54
5	0,05361 93	9,33293 68	8,52703 92	0,58981 26	55
6	0,06434 32	9,25899 62	8,52338 78	0,60053 65	56
7	0,07506 71	9,19726 80	8,51985 48	0,61126 03	57
8	0,08579 09	9,14447 26	8,51643 54	0,62198 42	58
9	0,09651 48	9,09849 45	8,51312 52	0,63270 81	59
10	0,10723 87	9,05788 95	8,50991 99	0,64343 19	60
11	0,11796 25	9,02162 73	8,50681 53	0,65415 58	61
12	0,12868 64	8,98894 73	8,50380 78	0,66487 97	62
13	0,13941 03	8,95927 17	8,50089 34	0,67560 35	63
14	0,15013 41	8,93215 16	8,49806 90	0,68632 74	64
15	0,16085 80	8,90723 11	8,49533 10	0,69705 13	65
16	0,17158 18	8,88422 30	8,49267 63	0,70777 51	66
17	0,18230 57	8,86289 29	8,49010 20	0,71849 90	67
18	0,19302 96	8,84304 63	8,48760 50	0,72922 28	68
19	0,20375 34	8,82452 04	8,48518 27	0,73994 67	69
20	0,21447 73	8,80717 72	8,48283 24	0,75067 06	70
21	0,22520 12	8,79089 94	8,48055 17	0,76139 44	71
22	0,23592 50	8,77558 57	8,47833 80	0,77211 83	72
23	0,24664 89	8,76114 85	8,47618 91	0,78284 22	73
24	0,25737 28	8,74751 14	8,47410 29	0,79356 60	74
25	0,26809 66	8,73460 72	8,47207 72	0,80428 99	75
26	0,27882 05	8,72237 68	8,47010 99	0,81501 38	76
27	0,28954 44	8,71076 77	8,46819 91	0,82573 76	77
28	0,30026 82	8,69973 31	8,46634 31	0,83646 15	78
29	0,31099 21	8,68923 13	8,46453 99	0,84718 54	79
30	0,32171 60	8,67922 47	8,46278 79	0,85790 92	80
31	0,33243 98	8,66967 94	8,46108 53	0,86863 31	81
32	0,34316 37	8,66056 49	8,45943 08	0,87935 70	82
33	0,35388 76	8,65185 33	8,45782 26	0,89008 08	83
34	0,36461 14	8,64351 93	8,45625 94	0,90080 47	84
35	0,37533 53	8,63553 99	8,45473 97	0,91152 86	85
36	0,38605 92	8,62789 39	8,45326 23	0,92225 24	86
37	0,39678 30	8,62056 18	8,45182 56	0,93297 63	87
38	0,40750 69	8,61352 59	8,45042 85	0,94370 02	88
39	0,41823 08	8,60676 98	8,44906 99	0,95442 40	89
40	0,42895 46	8,60027 83	8,44774 84	0,96514 79	90
41	0,43967 85	8,59403 72	8,44646 31	0,97587 18	91
42	0,45040 23	8,58803 36	8,44521 27	0,98659 56	92
43	0,46112 62	8,58225 53	8,44399 64	0,99731 95	93
44	0,47185 01	8,57669 11	8,44281 29	1,00804 33	94
45	0,48257 39	8,57133 06	8,44166 15	1,01876 72	95
46	0,49329 78	8,56616 35	8,44054 10	1,02949 11	96
47	0,50402 17	8,56118 12	8,43945 07	1,04021 49	97
48	0,51474 55	8,55637 48	8,43838 95	1,05093 88	98
49	0,52546 94	8,55173 64	8,43735 68	1,06166 27	99
50	0,53619 33	8,54725 84	8,43635 16	1,07238 65	100
			8,39794 00		Perpét.

$2\frac{5}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log $f_n(2\frac{5}{8})$	C^t log $f_n(2\frac{5}{8})$	log r^n	ANNÉES.
1	0,01125 32	0,01125 32	8,55387 14	0,57391 17	51
2	0,02250 63	9,71581 33	8,54984 90	0,58516 48	52
3	0,03375 95	9,54528 79	8,54596 51	0,59641 80	53
4	0,04501 27	9,42589 07	8,54221 36	0,60767 12	54
5	0,05626 59	9,33449 80	8,53858 90	0,61892 44	55
6	0,06751 90	9,26080 97	8,53508 61	0,63017 75	56
7	0,07877 22	9,19933 16	8,53169 96	0,64143 07	57
8	0,09002 54	9,14678 41	8,52842 49	0,65268 39	58
9	0,10127 85	9,10105 19	8,52525 77	0,66393 70	59
10	0,11253 17	9,06069 03	8,52219 35	0,67519 02	60
11	0,12378 49	9,02466 94	8,51922 83	0,68644 34	61
12	0,13503 80	8,99222 85	8,51635 83	0,69769 65	62
13	0,14629 12	8,96278 97	8,51357 98	0,70894 97	63
14	0,15754 44	8,93590 42	8,51088 94	0,72020 29	64
15	0,16879 76	8,91121 61	8,50828 38	0,73145 61	65
16	0,18005 07	8,88843 83	8,50575 97	0,74270 92	66
17	0,19130 39	8,86733 61	8,50331 43	0,75396 24	67
18	0,20255 71	8,84771 55	8,50094 45	0,76521 56	68
19	0,21381 02	8,82941 31	8,49864 78	0,77646 87	69
20	0,22506 34	8,81229 15	8,49642 15	0,78772 19	70
21	0,23631 66	8,79623 30	8,49426 29	0,79897 51	71
22	0,24756 97	8,78113 65	8,49217 00	0,81022 82	72
23	0,25882 29	8,76691 42	8,49014 01	0,82148 14	73
24	0,27007 61	8,75348 99	8,48817 13	0,83273 46	74
25	0,28132 93	8,74079 64	8,48626 14	0,84398 78	75
26	0,29258 24	8,72877 45	8,48440 48	0,85524 09	76
27	0,30383 56	8,71737 17	8,48261 04	0,86649 41	77
28	0,31508 88	8,70654 14	8,48086 55	0,87774 73	78
29	0,32634 19	8,69624 17	8,47917 20	0,88900 04	79
30	0,33759 51	8,68643 52	8,47752 80	0,90025 36	80
31	0,34884 83	8,67708 78	8,47593 21	0,91150 68	81
32	0,36010 14	8,66816 90	8,47438 26	0,92275 99	82
33	0,37135 46	8,65965 11	8,47287 81	0,93401 31	83
34	0,38260 78	8,65150 88	8,47141 70	0,94526 63	84
35	0,39386 10	8,64371 89	8,46999 80	0,95651 95	85
36	0,40511 41	8,63626 03	8,46861 98	0,96777 26	86
37	0,41636 73	8,62911 38	8,46728 10	0,97902 58	87
38	0,42762 05	8,62226 13	8,46598 05	0,99027 90	88
39	0,43887 36	8,61568 65	8,46471 69	1,00153 21	89
40	0,45012 68	8,60937 42	8,46348 91	1,01278 53	90
41	0,46138 00	8,60331 05	8,46229 62	1,02403 85	91
42	0,47263 31	8,59748 22	8,46113 68	1,03529 16	92
43	0,48388 63	8,59187 72	8,46001 01	1,04654 48	93
44	0,49513 95	8,58648 42	8,45891 50	1,05779 80	94
45	0,50639 27	8,58129 29	8,45785 06	1,06905 12	95
46	0,51764 58	8,57629 35	8,45681 59	1,08030 43	96
47	0,52889 90	8,57147 65	8,45581 00	1,09155 75	97
48	0,54015 22	8,56683 36	8,45483 22	1,10281 07	98
49	0,55140 53	8,56235 68	8,45388 13	1,11406 38	99
50	0,56265 85	8,55803 84	8,45295 69	1,12531 70	100
			8,41912 93		Perpét.

$2\frac{3}{4}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n ($2\frac{3}{4}$)	C^t log f_n ($2\frac{3}{4}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01178 18	0,01178 18	8,56466 78	0,60087 34	51
2	0,02356 37	9,71660 28	8,56079 64	0,61265 52	52
3	0,03534 55	9,54633 59	8,55706 15	0,62443 70	53
4	0,04712 73	9,42719 49	8,55345 71	0,63621 88	54
5	0,05890 92	9,33605 59	8,54997 78	0,64800 07	55
6	0,07069 10	9,26261 92	8,54661 81	0,65978 25	56
7	0,08247 28	9,20139 02	8,54337 31	0,67156 43	57
8	0,09425 46	9,14908 96	8,54023 81	0,68334 62	58
9	0,10603 65	9,10360 17	8,53720 85	0,69512 80	59
10	0,11781 83	9,06348 24	8,53428 02	0,70690 98	60
11	0,12960 01	9,02770 14	8,53144 91	0,71869 17	61
12	0,14138 20	8,99549 79	8,52871 14	0,73047 35	62
13	0,15316 38	8,96620 44	8,52606 34	0,74225 53	63
14	0,16494 56	8,93964 19	8,52350 17	0,75403 72	64
15	0,17672 75	8,91518 44	8,52102 30	0,76581 90	65
16	0,18850 93	8,89263 51	8,51862 41	0,77760 08	66
17	0,20029 11	8,87175 89	8,51630 21	0,78938 26	67
18	0,21207 29	8,85236 18	8,51405 41	0,80116 45	68
19	0,22385 48	8,83428 09	8,51187 74	0,81294 63	69
20	0,23563 66	8,81737 85	8,50976 93	0,82472 81	70
21	0,24741 84	8,80153 69	8,50772 75	0,83651 00	71
22	0,25920 03	8,78665 49	8,50574 95	0,84829 18	72
23	0,27098 21	8,77264 51	8,50383 30	0,86007 36	73
24	0,28276 39	8,75943 09	8,50197 59	0,87185 55	74
25	0,29454 58	8,74694 52	8,50017 61	0,88363 73	75
26	0,30632 76	8,73512 89	8,49843 16	0,89541 91	76
27	0,31810 94	8,72392 96	8,49674 05	0,90720 09	77
28	0,32989 13	8,71330 05	8,49510 10	0,91898 28	78
29	0,34167 31	8,70319 98	8,49351 12	0,93076 46	79
30	0,35345 49	8,69359 00	8,49196 96	0,94254 64	80
31	0,36523 67	8,68443 72	8,49047 45	0,95432 83	81
32	0,37701 86	8,67571 08	8,48902 44	0,96611 01	82
33	0,38880 04	8,66738 32	8,48761 76	0,97789 19	83
34	0,40058 22	8,65942 89	8,48625 28	0,98967 38	84
35	0,41236 41	8,65182 48	8,48492 87	1,00145 56	85
36	0,42414 59	8,64455 00	8,48364 40	1,01323 74	86
37	0,43592 77	8,63758 51	8,48239 72	1,02501 93	87
38	0,44770 96	8,63091 21	8,48118 72	1,03680 11	88
39	0,45949 14	8,62451 47	8,48001 29	1,04858 29	89
40	0,47127 32	8,61837 77	8,47887 30	1,06036 47	90
41	0,48305 51	8,61248 72	8,47776 64	1,07214 66	91
42	0,49483 69	8,60682 99	8,47669 23	1,08392 84	92
43	0,50661 87	8,60139 40	8,47564 94	1,09571 02	93
44	0,51840 05	8,59616 81	8,47463 68	1,10749 21	94
45	0,53018 24	8,59114 17	8,47365 35	1,11927 39	95
46	0,54196 42	8,58630 51	8,47269 87	1,13105 57	96
47	0,55374 60	8,58164 91	8,47177 15	1,14283 76	97
48	0,56552 79	8,57716 51	8,47087 10	1,15461 94	98
49	0,57730 97	8,57284 52	8,46999 64	1,16640 12	99
50	0,58909 15	8,56868 18	8,46914 69	1,17818 31	100
			8,43933 27		Perpét.

$2\frac{7}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n ($2\frac{7}{8}$)	C^t log f_n ($2\frac{7}{8}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01230 98	0,01230 98	8,57532 41	0,62780 23	51
2	0,02461 97	9,71739 12	8,57159 90	0,64011 21	52
3	0,03692 95	9,54738 21	8,56800 85	0,65242 20	53
4	0,04923 94	9,42849 66	8,56454 64	0,66473 18	54
5	0,06154 92	9,33761 07	8,56120 75	0,67704 17	55
6	0,07385 91	9,26442 45	8,55798 62	0,68935 15	56
7	0,08616 89	9,20344 38	8,55487 76	0,70166 13	57
8	0,09847 88	9,15138 89	8,55187 72	0,71397 12	58
9	0,11078 86	9,10614 43	8,54898 03	0,72628 10	59
10	0,12309 85	9,06626 59	8,54618 27	0,73859 09	60
11	0,13540 83	9,03072 33	8,54348 06	0,75090 07	61
12	0,14771 82	8,99875 58	8,54086 99	0,76321 06	62
13	0,16002 80	8,96978 60	8,53834 72	0,77552 04	63
14	0,17233 79	8,94336 46	8,53590 89	0,78783 03	64
15	0,18464 77	8,91913 59	8,53355 18	0,80014 01	65
16	0,19695 76	8,89681 29	8,53127 28	0,81245 00	66
17	0,20926 74	8,87616 09	8,52906 89	0,82475 98	67
18	0,22157 73	8,85698 54	8,52693 72	0,83706 97	68
19	0,23388 71	8,83912 38	8,52487 51	0,84937 95	69
20	0,24619 70	8,82243 82	8,52288 00	0,86168 94	70
21	0,25850 68	8,80681 12	8,52094 94	0,87399 92	71
22	0,27081 67	8,79214 13	8,51908 09	0,88630 91	72
23	0,28312 65	8,77834 13	8,51727 23	0,89861 89	73
24	0,29543 64	8,76533 45	8,51552 14	0,91092 88	74
25	0,30774 62	8,75305 39	8,51382 63	0,92323 86	75
26	0,32005 61	8,74144 05	8,51218 47	0,93554 85	76
27	0,33236 59	8,73044 16	8,51059 50	0,94785 83	77
28	0,34467 57	8,72001 06	8,50905 53	0,96016 82	78
29	0,35698 56	8,71010 58	8,50756 38	0,97247 80	79
30	0,36929 54	8,70068 95	8,50611 90	0,98478 79	80
31	0,38160 53	8,69172 80	8,50471 90	0,99709 77	81
32	0,39391 51	8,68319 07	8,50336 25	1,00940 76	82
33	0,40622 50	8,67504 98	8,50204 80	1,02171 74	83
34	0,41853 48	8,66728 00	8,50077 41	1,03402 72	84
35	0,43084 47	8,65985 83	8,49953 92	1,04633 71	85
36	0,44315 45	8,65276 36	8,49834 22	1,05864 69	86
37	0,45546 44	8,64597 66	8,49718 19	1,07095 68	87
38	0,46777 42	8,63947 92	8,49605 69	1,08326 66	88
39	0,48008 41	8,63325 52	8,49496 62	1,09557 65	89
40	0,49239 39	8,62728 96	8,49390 86	1,10788 63	90
41	0,50470 38	8,62156 81	8,49288 30	1,12019 62	91
42	0,51701 36	8,61607 79	8,49188 83	1,13250 60	92
43	0,52932 35	8,61080 69	8,49092 36	1,14481 59	93
44	0,54163 33	8,60574 36	8,48998 80	1,15712 57	94
45	0,55394 32	8,60087 79	8,48908 04	1,16943 56	95
46	0,56625 30	8,59619 98	8,48820 00	1,18174 54	96
47	0,57856 29	8,59170 02	8,48734 59	1,19405 53	97
48	0,59087 27	8,58737 06	8,48651 73	1,20636 51	98
49	0,60318 26	8,58320 31	8,48571 34	1,21867 50	99
50	0,61549 24	8,57918 99	8,48493 33	1,23098 48	100
			8,45863 78		Perpét.

3 pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (3)	C^t log f_n (3)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01283 72	0,01283 72	8,58584 21	0,65469 85	51
2	0,02567 44	9,71817 84	8,58225 86	0,66753 57	52
3	0,03851 17	9,54842 67	8,57880 78	0,68037 29	53
4	0,05134 89	9,42979 59	8,57548 32	0,69321 01	54
5	0,06418 61	9,33916 23	8,57227 98	0,70604 74	55
6	0,07702 33	9,26622 58	8,56919 22	0,71888 46	56
7	0,08986 06	9,20549 22	8,56621 52	0,73172 18	57
8	0,10269 78	9,15368 19	8,56334 42	0,74455 90	58
9	0,11553 50	9,10867 95	8,56057 53	0,75739 63	59
10	0,12837 22	9,06904 07	8,55790 35	0,77023 35	60
11	0,14120 95	9,03373 51	8,55532 53	0,78307 07	61
12	0,15404 67	9,00200 22	8,55283 67	0,79590 79	62
13	0,16688 39	8,97326 43	8,55043 41	0,80874 52	63
14	0,17972 11	8,94707 25	8,54811 42	0,82158 24	64
15	0,19255 84	8,92307 08	8,54587 36	0,83441 96	65
16	0,20539 56	8,90097 23	8,54370 93	0,84725 68	66
17	0,21823 28	8,88054 22	8,54161 83	0,86009 41	67
18	0,23107 00	8,86158 64	8,53959 78	0,87293 13	68
19	0,24390 73	8,84394 18	8,53764 51	0,88576 85	69
20	0,25674 45	8,82747 08	8,53575 76	0,89860 57	70
21	0,26958 17	8,81205 58	8,53393 29	0,91144 30	71
22	0,28241 89	8,79759 57	8,53216 86	0,92428 02	72
23	0,29525 62	8,78400 29	8,53046 27	0,93711 74	73
24	0,30809 34	8,77120 09	8,52881 27	0,94995 46	74
25	0,32093 06	8,75912 27	8,52721 68	0,96279 19	75
26	0,33376 78	8,74770 92	8,52567 30	0,97562 91	76
27	0,34660 51	8,73690 79	8,52417 94	0,98846 63	77
28	0,35944 23	8,72667 20	8,52273 41	1,00130 35	78
29	0,37227 95	8,71696 00	8,52133 56	1,01414 08	79
30	0,38511 67	8,70773 41	8,51998 21	1,02697 80	80
31	0,39795 40	8,69896 07	8,51867 20	1,03981 52	81
32	0,41079 12	8,69060 91	8,51740 38	1,05265 24	82
33	0,42362 84	8,68265 15	8,51617 61	1,06548 97	83
34	0,43646 56	8,67506 27	8,51498 76	1,07832 69	84
35	0,44930 29	8,66781 98	8,51383 67	1,09116 41	85
36	0,46214 01	8,66090 15	8,51272 22	1,10400 13	86
37	0,47497 73	8,65428 85	8,51164 30	1,11683 85	87
38	0,48781 45	8,64796 30	8,51059 77	1,12967 58	88
39	0,50065 18	8,64190 86	8,50958 53	1,14251 30	89
40	0,51348 90	8,63611 04	8,50860 46	1,15535 02	90
41	0,52632 62	8,63055 41	8,50765 46	1,16818 74	91
42	0,53916 34	8,62522 68	8,50673 42	1,18102 47	92
43	0,55200 07	8,62011 63	8,50584 25	1,19386 19	93
44	0,56483 79	8,61521 17	8,50497 85	1,20669 91	94
45	0,57767 51	8,61050 23	8,50414 14	1,21953 63	95
46	0,59051 23	8,60597 85	8,50333 02	1,23237 36	96
47	0,60334 96	8,60163 10	8,50254 40	1,24521 08	97
48	0,61618 68	8,59745 14	8,50178 22	1,25804 80	98
49	0,62902 40	8,59343 16	8,50104 37	1,27088 52	99
50	0,64186 12	8,58956 42	8,50032 80	1,28372 25	100
			8,47712 13		Perpét.

$3\frac{1}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n ($3\frac{1}{8}$)	C^t log f_n ($3\frac{1}{8}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01336 40	0,01336 40	8,59622 33	0,68156 20	51
2	0,02672 79	9,71896 45	8,59277 69	0,69492 60	52
3	0,04009 19	9,54946 96	8,58946 09	0,70829 00	53
4	0,05345 58	9,43109 29	8,58626 95	0,72165 39	54
5	0,06681 98	9,34071 08	8,58319 69	0,73501 79	55
6	0,08018 38	9,26802 30	8,58023 81	0,74838 18	56
7	0,09354 77	9,20753 57	8,57738 81	0,76174 58	57
8	0,10691 17	9,15596 89	8,57464 21	0,77510 98	58
9	0,12027 57	9,11120 74	8,57199 59	0,78847 37	59
10	0,13363 96	9,07180 68	8,56944 52	0,80183 77	60
11	0,14700 36	9,03673 69	8,56698 59	0,81520 17	61
12	0,16036 75	9,00523 70	8,56461 45	0,82856 56	62
13	0,17373 15	8,97672 96	8,56232 71	0,84192 96	63
14	0,18709 55	8,95076 56	8,56012 06	0,85529 35	64
15	0,20045 94	8,92698 91	8,55799 15	0,86865 75	65
16	0,21382 34	8,90511 32	8,55593 69	0,88202 15	66
17	0,22718 73	8,88490 32	8,55395 39	0,89538 54	67
18	0,24055 13	8,86616 47	8,55203 95	0,90874 94	68
19	0,25391 53	8,84873 51	3,55019 12	0,92211 34	69
20	0,26727 92	8,83247 65	8,54840 61	0,93547 73	70
21	0,28064 32	8,81727 12	8,54668 24	0,94884 13	71
22	0,29400 72	8,80301 83	8,54501 74	0,96220 52	72
23	0,30737 11	8,78963 02	8,54340 89	0,97556 92	73
24	0,32073 51	8,77703 03	8,54185 47	0,98893 32	74
25	0,33409 90	8,76515 18	8,54035 30	1,00229 71	75
26	0,34746 30	8,75393 54	8,53890 17	1,01566 11	76
27	0,36082 70	8,74332 87	8,53749 91	1,02902 50	77
28	0,37419 09	8,73328 51	8,53614 32	1,04238 90	78
29	0,38755 49	8,72376 27	8,53483 25	1,05575 30	79
30	0,40091 88	8,71472 42	8,53356 52	1,06911 69	80
31	0,41428 28	8,70613 55	8,53233 99	1,08248 09	81
32	0,42764 68	8,69796 63	8,53115 50	1,09584 49	82
33	0,44101 07	8,69018 87	8,53000 90	1,10920 88	83
34	0,45437 47	8,68277 75	8,52890 07	1,12257 28	84
35	0,46773 87	8,67570 97	8,52782 86	1,13593 67	85
36	0,48110 26	8,66896 42	8,52679 16	1,14930 07	86
37	0,49446 66	8,66252 16	8,52578 84	1,16266 47	87
38	0,50783 05	8,65636 44	8,52481 77	1,17602 86	88
39	0,52119 45	8,65047 58	8,52387 86	1,18939 26	89
40	0,53455 85	8,64484 10	8,52296 98	1,20275 65	90
41	0,54792 24	8,63944 58	8,52209 04	1,21612 05	91
42	0,56128 64	8,63427 75	8,52123 93	1,22948 45	92
43	0,57465 03	8,62932 37	8,52041 56	1,24284 84	93
44	0,58801 43	8,62457 34	8,51961 84	1,25621 24	94
45	0,60137 83	8,62001 62	8,51884 67	1,26957 64	95
46	0,61474 22	8,61564 23	8,51809 97	1,28294 03	96
47	0,62810 62	8,61144 26	8,51737 66	1,29630 43	97
48	0,64147 02	8,60740 86	8,51667 65	1,30966 82	98
49	0,65483 41	8,60353 23	8,51599 87	1,32303 22	99
50	0,66819 81	8,59980 62	8,51534 25	1,33639 62	100
			8,49485 00		Perpét.

3 $\frac{1}{4}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (3 $\frac{1}{4}$)	C^t log f_n (3 $\frac{1}{4}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01389 01	0,01389 01	8,60646 92	0,70839 31	51
2	0,02778 01	9,71974 96	8,60315 55	0,72228 31	52
3	0,04167 02	9,55051 08	8,59997 00	0,73617 32	53
4	0,05556 02	9,43238 76	8,59690 69	0,75006 33	54
5	0,06945 03	9,34225 60	8,59396 07	0,76395 33	55
6	0,08334 04	9,26981 63	8,59112 62	0,77784 34	56
7	0,09723 04	9,20957 41	8,58839 84	0,79173 34	57
8	0,11112 05	9,15824 98	8,58577 28	0,80562 35	58
9	0,12501 05	9,11372 80	8,58324 47	0,81951 36	59
10	0,13890 06	9,07456 43	8,58081 02	0,83340 36	60
11	0,15279 07	9,03972 87	8,57846 52	0,84729 37	61
12	0,16668 07	9,00846 04	8,57620 62	0,86118 37	62
13	0,18057 08	8,98018 18	8,57402 93	0,87507 38	63
14	0,19446 08	8,95444 39	8,57193 13	0,88896 39	64
15	0,20835 09	8,93089 08	8,56990 90	0,90285 39	65
16	0,22224 10	8,90923 57	8,56795 93	0,91674 40	66
17	0,23613 10	8,88924 38	8,56607 92	0,93063 40	67
18	0,25002 11	8,87072 07	8,56426 61	0,94452 41	68
19	0,26391 11	8,85350 37	8,56251 72	0,95841 42	69
20	0,27780 12	8,83745 51	8,56083 01	0,97230 42	70
21	0,29169 13	8,82245 73	8,55920 23	0,98619 43	71
22	0,30558 13	8,80840 92	8,55763 15	1,00008 43	72
23	0,31947 14	8,79522 32	8,55611 56	1,01397 44	73
24	0,33336 14	8,78282 30	8,55465 23	1,02786 45	74
25	0,34725 15	8,77114 14	8,55323 98	1,04175 45	75
26	0,36114 16	8,76011 94	8,55187 62	1,05564 46	76
27	0,37503 16	8,74970 45	8,55055 96	1,06953 46	77
28	0,38892 17	8,73985 00	8,54928 82	1,08342 47	78
29	0,40281 17	8,73051 44	8,54806 03	1,09731 48	79
30	0,41670 18	8,72165 99	8,54687 46	1,11120 48	80
31	0,43059 19	8,71325 29	8,54572 89	1,12509 49	81
32	0,44448 19	8,70526 28	8,54462 24	1,13898 49	82
33	0,45837 20	8,69766 18	8,54355 34	1,15287 50	83
34	0,47226 21	8,69042 48	8,54252 05	1,16676 51	84
35	0,48615 21	8,68352 86	8,54152 24	1,18065 51	85
36	0,50004 22	8,67695 24	8,54055 79	1,19454 52	86
37	0,51393 22	8,67067 67	8,53962 59	1,20843 52	87
38	0,52782 23	8,66468 37	8,53872 51	1,22232 53	88
39	0,54171 24	8,65895 73	8,53785 45	1,23621 54	89
40	0,55560 24	8,65348 21	8,53701 28	1,25010 54	90
41	0,56949 25	8,64824 42	8,53619 93	1,26399 55	91
42	0,58338 25	8,64323 07	8,53541 28	1,27788 55	92
43	0,59727 26	8,63842 97	8,53465 23	1,29177 56	93
44	0,61116 27	8,63380 97	8,53391 71	1,30566 57	94
45	0,62505 27	8,62942 06	8,53320 63	1,31955 57	95
46	0,63894 28	8,62519 25	8,53251 89	1,33344 58	96
47	0,65283 28	8,62113 63	8,53185 41	1,34733 58	97
48	0,66672 29	8,61724 36	8,53121 14	1,36122 59	98
49	0,68061 30	8,61350 65	8,53058 96	1,37511 60	99
50	0,69450 30	8,60991 73	8,52998 83	1,38900 60	100
			8,51188 34		Perpét.

3 $\frac{3}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (3 $\frac{3}{8}$)	C^t log f_n (3 $\frac{3}{8}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01441 55	0,01441 55	8,61658 14	0,73519 17	51
2	0,02883 10	9,72053 35	8,61339 61	0,74960 72	52
3	0,04324 66	9,55155 02	8,61033 67	0,76402 27	53
4	0,05766 21	9,43367 98	8,60739 76	0,77843 82	54
5	0,07207 76	9,34379 82	8,60457 33	0,79285 37	55
6	0,08649 31	9,27160 56	8,60185 85	0,80726 93	56
7	0,10090 87	9,21160 74	8,59924 85	0,82168 48	57
8	0,11532 42	9,16052 46	8,59673 85	0,83610 03	58
9	0,12973 97	9,11624 14	8,59432 41	0,85051 58	59
10	0,14415 52	9,07731 34	8,59200 13	0,86493 14	60
11	0,15857 07	9,04271 06	8,58976 61	0,87934 69	61
12	0,17298 63	9,01167 24	8,58761 47	0,89376 24	62
13	0,18740 18	8,98362 11	8,58554 37	0,90817 79	63
14	0,20181 73	8,95810 76	8,58354 97	0,92259 34	64
15	0,21623 28	8,93477 62	8,58162 94	0,93700 90	65
16	0,23064 84	8,91333 99	8,57977 98	0,95142 45	66
17	0,24506 39	8,89356 40	8,57799 81	0,96584 00	67
18	0,25947 94	8,87525 43	8,57628 15	0,98025 55	68
19	0,27389 49	8,85824 80	8,57462 75	0,99467 11	69
20	0,28831 05	8,84240 71	8,57303 32	1,00908 66	70
21	0,30272 60	8,82761 44	8,57149 67	1,02350 21	71
22	0,31714 15	8,81376 87	8,57001 56	1,03791 76	72
23	0,33155 70	8,80078 24	8,56858 74	1,05233 31	73
24	0,34597 25	8,78857 90	8,56721 04	1,06674 87	74
25	0,36038 81	8,77709 16	8,56588 25	1,08116 42	75
26	0,37480 36	8,76626 12	8,56460 18	1,09557 97	76
27	0,38921 91	8,75603 53	8,56336 65	1,10999 52	77
28	0,40363 46	8,74636 72	8,56217 50	1,12441 08	78
29	0,41805 02	8,73721 51	8,56102 52	1,13882 63	79
30	0,43246 57	8,72854 17	8,55991 60	1,15324 18	80
31	0,44688 12	8,72031 32	8,55884 57	1,16765 73	81
32	0,46129 67	8,71249 89	8,55781 29	1,18207 29	82
33	0,47571 22	8,70507 13	8,55681 61	1,19648 84	83
34	0,49012 78	8,69800 50	8,55585 40	1,21090 39	84
35	0,50454 33	8,69127 71	8,55492 53	1,22531 94	85
36	0,51895 88	8,68486 66	8,55402 88	1,23973 49	86
37	0,53337 43	8,67875 41	8,55316 34	1,25415 05	87
38	0,54778 99	8,67292 19	8,55232 79	1,26856 60	88
39	0,56220 54	8,66735 37	8,55152 12	1,28298 15	89
40	0,57662 09	8,66203 45	8,55074 23	1,29739 70	90
41	0,59103 64	8,65695 01	8,54999 00	1,31181 26	91
42	0,60545 19	8,65208 77	8,54926 35	1,32622 81	92
43	0,61986 75	8,64743 53	8,54856 21	1,34064 36	93
44	0,63428 30	8,64298 18	8,54788 44	1,35505 91	94
45	0,64869 85	8,63871 66	8,54723 01	1,36947 46	95
46	0,66311 40	8,63463 02	8,54659 79	1,38389 02	96
47	0,67752 96	8,63071 35	8,54598 73	1,39830 57	97
48	0,69194 51	8,62695 79	8,54539 76	1,41272 12	98
49	0,70636 06	8,62335 56	8,54482 77	1,42713 67	99
50	0,72077 61	8,61989 91	8,54427 70	1,44155 23	100
			8,52827 38		Perpét.

3 ½ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (3 ½)	C^t log f_n (3 ½)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01494 03	0,01494 03	8,62656 17	0,76195 78	51
2	0,02988 07	9,72131 63	8,62350 03	0,77689 82	52
3	0,04482 10	9,55258 81	8,62056 28	0,79183 85	53
4	0,05976 14	9,43496 97	8,61774 35	0,80677 89	54
5	0,07470 17	9,34533 72	8,61503 66	0,82171 92	55
6	0,08964 21	9,27339 07	8,61243 73	0,83665 96	56
7	0,10458 24	9,21363 59	8,60994 06	0,85159 99	57
8	0,11952 28	9,16279 32	8,60754 19	0,86654 03	58
9	0,13446 31	9,11874 74	8,60523 67	0,88148 06	59
10	0,14940 35	9,08005 39	8,60302 11	0,89642 10	60
11	0,16434 38	9,04568 27	8,60089 11	0,91136 13	61
12	0,17928 42	9,01487 30	8,59884 30	0,92630 17	62
13	0,19422 45	8,98704 74	8,59687 33	0,94124 20	63
14	0,20916 49	8,96175 67	8,59497 87	0,95618 24	64
15	0,22410 52	8,93864 51	8,59315 60	0,97112 27	65
16	0,23904 56	8,91742 58	8,59140 20	0,98606 31	66
17	0,25398 59	8,89786 42	8,58971 42	1,00100 34	67
18	0,26892 63	8,87976 57	8,58808 95	1,01594 38	68
19	0,28386 66	8,86296 78	8,58652 57	1,03088 41	69
20	0,29880 70	8,84733 25	8,58502 01	1,04582 45	70
21	0,31374 73	8,83274 26	8,58357 02	1,06076 48	71
22	0,32868 77	8,81909 67	8,58217 40	1,07570 52	72
23	0,34362 80	8,80630 76	8,58082 92	1,09064 55	73
24	0,35856 84	8,79429 86	8,57953 39	1,10558 59	74
25	0,37350 87	8,78300 29	8,57828 60	1,12052 62	75
26	0,38844 91	8,77236 13	8,57708 38	1,13546 66	76
27	0,40338 94	8,76232 15	8,57592 53	1,15040 69	77
28	0,41832 98	8,75283 67	8,57480 89	1,16534 73	78
29	0,43327 01	8,74386 54	8,57373 31	1,18028 76	79
30	0,44821 05	8,73536 99	8,57269 61	1,19522 80	80
31	0,46315 08	8,72731 67	8,57169 65	1,21016 83	81
32	0,47809 12	8,71967 52	8,57073 29	1,22510 87	82
33	0,49303 15	8,71241 75	8,56980 39	1,24004 90	83
34	0,50797 19	8,70551 87	8,56890 83	1,25498 94	84
35	0,52291 22	8,69895 57	8,56804 46	1,26992 97	85
36	0,53785 26	8,69270 74	8,56721 18	1,28487 01	86
37	0,55279 29	8,68675 46	8,56640 87	1,29981 04	87
38	0,56773 33	8,68107 96	8,56563 41	1,31475 08	88
39	0,58267 36	8,67566 61	8,56488 71	1,32969 11	89
40	0,59761 40	8,67049 89	8,56416 65	1,34463 15	90
41	0,61255 43	8,66556 43	8,56347 14	1,35957 18	91
42	0,62749 47	8,66084 92	8,56280 09	1,37451 22	92
43	0,64243 50	8,65634 16	8,56215 41	1,38945 25	93
44	0,65737 54	8,65203 04	8,56153 00	1,40439 29	94
45	0,67231 57	8,64790 53	8,56092 79	1,41933 32	95
46	0,68725 61	8,64395 66	8,56034 69	1,43427 36	96
47	0,70219 64	8,64017 52	8,55978 64	1,44921 39	97
48	0,71713 68	8,63655 27	8,55924 54	1,46415 43	98
49	0,73207 71	8,63308 11	8,55872 35	1,47909 46	99
50	0,74701 75	8,62975 31	8,55821 96	1,49403 50	100
			8,54406 80		Perpét.

3 $\frac{5}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (3 $\frac{5}{8}$)	C^t log f_n (3 $\frac{5}{8}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01546 45	0,01546 45	8,63641 15	0,78869 17	51
2	0,03092 91	9,72209 80	8,63347 00	0,80415 63	52
3	0,04639 36	9,55362 44	8,63065 02	0,81962 08	53
4	0,06185 82	9,43625 72	8,62794 62	0,83508 54	54
5	0,07732 27	9,34687 31	8,62535 28	0,85054 99	55
6	0,09278 73	9,27517 19	8,62286 45	0,86601 44	56
7	0,10825 18	9,21565 94	8,62047 69	0,88147 90	57
8	0,12371 63	9,16505 60	8,61818 52	0,89694 35	58
9	0,13918 09	9,12124 62	8,61598 50	0,91240 81	59
10	0,15464 54	9,08278 59	8,61387 22	0,92787 26	60
11	0,17011 00	9,04864 47	8,61184 31	0,94333 72	61
12	0,18557 45	9,01806 22	8,60989 39	0,95880 17	62
13	0,20103 91	8,99046 07	8,60802 13	0,97426 62	63
14	0,21650 36	8,96539 11	8,60622 17	0,98973 08	64
15	0,23196 82	8,94249 77	8,60449 21	1,00519 53	65
16	0,24743 27	8,92149 36	8,60282 94	1,02065 99	66
17	0,26289 72	8,90214 42	8,60123 11	1,03612 44	67
18	0,27836 18	8,88425 49	8,59969 41	1,05158 90	68
19	0,29382 63	8,86766 32	8,59821 61	1,06705 35	69
20	0,30929 09	8,85223 13	8,59679 46	1,08251 81	70
21	0,32475 54	8,83784 18	8,59542 71	1,09798 26	71
22	0,34022 00	8,82439 36	8,59411 16	1,11344 71	72
23	0,35568 45	8,81179 91	8,59284 57	1,12891 17	73
24	0,37114 90	8,79998 20	8,59162 77	1,14437 62	74
25	0,38661 36	8,78887 52	8,59045 57	1,15984 08	75
26	0,40207 81	8,77841 97	8,58932 74	1,17530 53	76
27	0,41754 27	8,76856 32	8,58824 15	1,19076 99	77
28	0,43300 72	8,75925 90	8,58719 61	1,20623 44	78
29	0,44847 18	8,75046 55	8,58618 97	1,22169 89	79
30	0,46393 63	8,74214 50	8,58522 07	1,23716 35	80
31	0,47940 09	8,73426 39	8,58428 77	1,25262 80	81
32	0,49486 54	8,72679 19	8,58338 91	1,26809 26	82
33	0,51032 99	8,71970 10	8,58252 38	1,28355 71	83
34	0,52579 45	8,71296 62	8,58169 04	1,29902 17	84
35	0,54125 90	8,70656 48	8,58088 76	1,31448 62	85
36	0,55672 36	8,70047 54	8,58011 44	1,32995 07	86
37	0,57218 81	8,69467 89	8,57936 95	1,34541 53	87
38	0,58765 27	8,68915 74	8,57865 18	1,36087 98	88
39	0,60311 72	8,68389 49	8,57796 03	1,37634 44	89
40	0,61858 17	8,67887 63	8,57729 41	1,39180 89	90
41	0,63404 63	8,67408 76	8,57665 23	1,40727 35	91
42	0,64951 08	8,66951 59	8,57603 37	1,42273 80	92
43	0,66497 54	8,66514 94	8,57543 75	1,43820 26	93
44	0,68043 99	8,66097 69	8,57486 30	1,45366 71	94
45	0,69590 45	8,65698 79	8,57430 94	1,46913 16	95
46	0,71136 90	8,65317 29	8,57377 57	1,48459 62	96
47	0,72683 35	8,64952 28	8,57326 15	1,50006 07	97
48	0,74229 81	8,64602 92	8,57276 57	1,51552 53	98
49	0,75776 26	8,64268 44	8,57228 78	1,53098 98	99
50	0,77322 72	8,63948 08	8,57182 71	1,54645 44	100
			8,55930 80		Perpét.

3 $\frac{3}{4}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n ($3\frac{3}{4}$)	C^t log f_n ($3\frac{3}{4}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01598 81	0,01598 81	8,64613 25	0,81539 34	51
2	0,03197 62	9,72287 86	8,64330 69	0,83138 15	52
3	0,04796 43	9,55465 88	8,64060 06	0,84736 96	53
4	0,06395 24	9,43754 25	8,63800 81	0,86335 77	54
5	0,07994 05	9,34840 59	8,63552 38	0,87934 58	55
6	0,09592 86	9,27694 92	8,63314 26	0,89533 39	56
7	0,11191 67	9,21767 79	8,63085 99	0,91132 20	57
8	0,12790 48	9,16731 26	8,62867 09	0,92731 01	58
9	0,14389 29	9,12373 79	8,62657 14	0,94329 82	59
10	0,15988 11	9,08550 94	8,62455 74	0,95928 63	60
11	0,17586 92	9,05159 71	8,62262 50	0,97527 44	61
12	0,19185 73	9,02124 02	8,62077 05	0,99126 25	62
13	0,20784 54	8,99386 12	8,61899 06	1,00725 06	63
14	0,22383 35	8,96901 11	8,61728 18	1,02323 87	64
15	0,23982 16	8,94633 40	8,61564 11	1,03922 69	65
16	0,25580 97	8,92554 32	8,61406 56	1,05521 50	66
17	0,27179 78	8,90640 40	8,61255 26	1,07120 31	67
18	0,28778 59	8,88872 20	8,61109 89	1,08719 12	68
19	0,30377 40	8,87233 45	8,60970 26	1,10317 93	69
20	0,31976 21	8,85710 38	8,60836 09	1,11916 74	70
21	0,33575 02	8,84291 25	8,60707 15	1,13515 55	71
22	0,35173 83	8,82965 95	8,60583 25	1,15114 36	72
23	0,36772 64	8,81725 72	8,60464 16	1,16713 17	73
24	0,38371 45	8,80562 93	8,60349 67	1,18311 98	74
25	0,39970 26	8,79470 89	8,60239 62	1,19910 79	75
26	0,41569 07	8,78443 69	8,60133 80	1,21509 60	76
27	0,43167 88	8,77476 09	8,60032 05	1,23108 41	77
28	0,44766 70	8,76563 43	8,59934 21	1,24707 22	78
29	0,46365 51	8,75701 55	8,59840 11	1,26306 03	79
30	0,47964 32	8,74886 70	8,59749 60	1,27904 84	80
31	0,49563 13	8,74115 52	8,59662 54	1,29503 65	81
32	0,51161 94	8,73384 95	8,59578 79	1,31102 46	82
33	0,52760 75	8,72692 23	8,59498 22	1,32701 27	83
34	0,54359 56	8,72034 85	8,59420 71	1,34300 09	84
35	0,55958 37	8,71410 50	8,59346 13	1,35898 90	85
36	0,57557 18	8,70817 10	8,59274 37	1,37497 71	86
37	0,59155 99	8,70252 72	8,59205 31	1,39096 52	87
38	0,60754 80	8,69715 60	8,59138 85	1,40695 33	88
39	0,62353 61	8,69204 10	8,59074 89	1,42294 14	89
40	0,63952 42	8,68716 73	8,59013 33	1,43892 95	90
41	0,65551 23	8,68252 09	8,58954 08	1,45491 76	91
42	0,67150 04	8,67808 90	8,58897 05	1,47090 57	92
43	0,68748 85	8,67385 97	8,58842 14	1,48689 38	93
44	0,70347 66	8,66982 19	8,58789 29	1,50288 19	94
45	0,71946 47	8,66596 52	8,58738 41	1,51887 00	95
46	0,73545 28	8,66228 01	8,58689 42	1,53485 81	96
47	0,75144 10	8,65875 75	8,58642 26	1,55084 62	97
48	0,76742 91	8,65538 91	8,58596 86	1,56683 43	98
49	0,78341 72	8,65216 69	8,58553 13	1,58282 24	99
50	0,79940 53	8,64908 37	8,58511 03	1,59881 05	100
			8,57403 13		Perpét.

$3\frac{7}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log $f_n(3\frac{7}{8})$	C^t log $f_n(3\frac{7}{8})$	log r^n	ANNÉES.
1	0,01651 10	0,01651 10	8,65572 64	0,84206 29	51
2	0,03302 21	9,72365 81	8,65301 26	0,85857 39	52
3	0,04953 31	9,55569 16	8,65041 60	0,87508 50	53
4	0,06604 41	9,43882 53	8,64793 08	0,89159 60	54
5	0,08255 52	9,34993 56	8,64555 17	0,90810 70	55
6	0,09906 62	9,27872 24	8,64327 35	0,92461 81	56
7	0,11557 73	9,21969 15	8,64109 16	0,94112 91	57
8	0,13208 83	9,16956 32	8,63900 14	0,95764 01	58
9	0,14859 93	9,12622 23	8,63699 86	0,97415 12	59
10	0,16511 04	9,08822 45	8,63507 92	0,99066 22	60
11	0,18162 14	9,05453 96	8,63323 94	1,00717 32	61
12	0,19813 24	9,02440 69	8,63147 56	1,02368 43	62
13	0,21464 35	8,99724 88	8,62978 43	1,04019 53	63
14	0,23115 45	8,97261 65	8,62816 23	1,05670 64	64
15	0,24766 56	8,95015 42	8,62660 65	1,07321 74	65
16	0,26417 66	8,92957 49	8,62511 40	1,08972 84	66
17	0,28068 76	8,91064 39	8,62368 20	1,10623 95	67
18	0,29719 87	8,89316 72	8,62230 79	1,12275 05	68
19	0,31370 97	8,87698 17	8,62098 91	1,13926 15	69
20	0,33022 07	8,86195 01	8,61972 33	1,15577 26	70
21	0,34673 18	8,84795 47	8,61850 82	1,17228 36	71
22	0,36324 28	8,83489 44	8,61734 17	1,18879 46	72
23	0,37975 38	8,82268 19	8,61622 15	1,20530 57	73
24	0,39626 49	8,81124 08	8,61514 59	1,22181 67	74
25	0,41277 59	8,80050 41	8,61411 30	1,23832 78	75
26	0,42928 70	8,79041 29	8,61312 08	1,25483 88	76
27	0,44579 80	8,78091 47	8,61216 79	1,27134 98	77
28	0,46230 90	8,77196 29	8,61125 24	1,28786 09	78
29	0,47882 01	8,76351 60	8,61037 30	1,30437 19	79
30	0,49533 11	8,75553 66	8,60952 79	1,32088 29	80
31	0,51184 21	8,74799 08	8,60871 60	1,33739 40	81
32	0,52835 32	8,74084 85	8,60730 58	1,35390 50	82
33	0,54486 42	8,73408 17	8,60718 60	1,37041 61	83
34	0,56137 53	8,72766 54	8,60646 54	1,38692 71	84
35	0,57788 63	8,72157 69	8,60577 28	1,40343 81	85
36	0,59439 73	8,71579 50	8,60510 72	1,41994 92	86
37	0,61090 84	8,71030 06	8,60446 73	1,43646 02	87
38	0,62741 94	8,70507 60	8,60385 22	1,45297 12	88
39	0,64393 04	8,70010 51	8,60326 08	1,46948 23	89
40	0,66044 15	8,69537 26	8,60269 23	1,48599 33	90
41	0,67695 25	8,69086 51	8,90214 55	1,50250 43	91
42	0,69346 35	8,68656 93	8,60162 00	1,51901 54	92
43	0,70997 46	8,68247 36	8,60111 46	1,53552 64	93
44	0,72648 56	8,67856 68	8,60062 86	1,55203 75	94
45	0,74299 67	8,67483 87	8,60016 13	1,56854 85	95
46	0,75950 77	8,67127 97	8,59971 18	1,58505 95	96
47	0,77601 87	8,66788 07	8,59927 96	1,60157 06	97
48	0,79252 98	8,66463 35	8,59886 40	1,61808 16	98
49	0,80904 08	8,66153 02	8,59846 42	1,63459 26	99
50	0,82555 18	8,65856 35	8,59807 96	1,65110 37	100
			8,58827 17		Perpét.

4 pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (4)	C^t log f_n (4)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01703 33	0,01703 33	8,66519 48	0,86870 03	51
2	0,03406 67	9,72443 65	8,66258 90	0,88573 36	52
3	0,05110 00	9,55672 28	8,66009 81	0,90276 70	53
4	0,06813 34	9,44010 59	8,65771 61	0,91980 03	54
5	0,08516 67	9,35146 22	8,65543 85	0,93683 37	55
6	0,10220 00	9,28049 16	8,65325 96	0,95386 70	56
7	0,11923 34	9,22170 01	8,65117 45	0,97090 03	57
8	0,13626 67	9,17180 78	8,64917 91	0,98793 37	58
9	0,15330 01	9,12869 97	8,64726 91	1,00496 70	59
10	0,17033 34	9,09093 12	8,64544 04	1,02200 04	60
11	0,18736 67	9,05747 23	8,64368 93	1,03903 37	61
12	0,20440 01	9,02756 23	8,64201 22	1,05606 70	62
13	0,22143 34	9,00062 38	8,64040 56	1,07310 04	63
14	0,23846 68	8,97620 77	8,63886 64	1,09013 37	64
15	0,25550 01	8,95395 82	8,63739 16	1,10716 71	65
16	0,27253 34	8,93358 85	8,63597 82	1,12420 04	66
17	0,28956 68	8,91486 40	8,63462 35	1,14123 37	67
18	0,30660 01	8,89759 04	8,63332 48	1,15826 71	68
19	0,32363 34	8,88160 50	8,63207 97	1,17530 04	69
20	0,34066 68	8,86677 02	8,63088 59	1,19233 38	70
21	0,35770 01	8,85296 84	8,62974 11	1,20936 71	71
22	0,37473 35	8,84009 86	8,62864 32	1,22640 04	72
23	0,39176 68	8,82807 35	8,62759 01	1,24343 38	73
24	0,40880 01	8,81681 66	8,62657 99	1,26046 71	74
25	0,42583 35	8,80626 12	8,62561 08	1,27750 04	75
26	0,44286 68	8,79634 80	8,62468 09	1,29453 38	76
27	0,45990 02	8,78702 48	8,62378 89	1,31156 71	77
28	0,47693 35	8,77824 52	8,62293 26	1,32860 05	78
29	0,49396 68	8,76996 73	8,62211 11	1,34563 38	79
30	0,51100 02	8,76215 40	8,62132 25	1,36266 71	80
31	0,52803 35	8,75477 14	8,62056 56	1,37970 05	81
32	0,54506 69	8,74778 92	8,61983 91	1,39673 38	82
33	0,56210 02	8,74117 97	8,61914 16	1,41376 72	83
34	0,57913 35	8,73491 80	8,61847 21	1,43080 05	84
35	0,59616 69	8,72898 10	8,61782 92	1,44783 38	85
36	0,61320 02	8,72334 80	8,61721 20	1,46486 72	86
37	0,63023 36	8,71799 95	8,61661 94	1,48190 05	87
38	0,64726 69	8,71291 83	8,61605 03	1,49893 39	88
39	0,66430 02	8,70808 79	8,61550 38	1,51596 72	89
40	0,68133 36	8,70349 33	8,61497 89	1,53300 05	90
41	0,69836 69	8,69912 09	8,61447 48	1,55003 39	91
42	0,71540 03	8,69495 78	8,61399 08	1,56706 72	92
43	0,73243 36	8,69099 20	8,61352 58	1,58410 06	93
44	0,74946 69	8,68721 27	8,61307 91	1,60113 39	94
45	0,76650 03	8,68360 94	8,61265 01	1,61816 72	95
46	0,78353 36	8,68017 27	8,61223 80	1,63520 06	96
47	0,80056 69	8,67689 37	8,61184 21	1,65223 39	97
48	0,81760 03	8,67376 39	8,61146 18	1,66926 73	98
49	0,83463 36	8,67077 56	8,61109 64	1,68630 06	99
50	0,85166 70	8,66792 16	8,61074 53	1,70333 39	100
			8,60206 00		Perpét.

4 $\frac{1}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (4 $\frac{1}{8}$)	C^t log f_n (4 $\frac{1}{8}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01755 50	0,01755 50	8,67453 95	0,89530 57	51
2	0,03511 00	9,72521 38	8,67203 78	0,91286 07	52
3	0,05266 50	9,55775 22	8,66964 88	0,93041 58	53
4	0,07022 01	9,44138 41	8,66736 68	0,94797 08	54
5	0,08777 51	9,35298 56	8,66518 65	0,96552 58	55
6	0,10533 01	9,28225 70	8,66310 27	0,98308 08	56
7	0,12288 51	9,22370 38	8,66111 09	1,00063 58	57
8	0,14044 01	9,17404 65	8,65920 66	1,01819 08	58
9	0,15799 51	9,13116 98	8,65738 54	1,03574 58	59
10	0,17555 01	9,09362 95	8,65564 36	1,05330 09	60
11	0,19310 52	9,06039 52	8,65397 73	1,07085 59	61
12	0,21066 02	9,03070 66	8,65238 31	1,08841 09	62
13	0,22821 52	9,00398 60	8,65085 75	1,10596 59	63
14	0,24577 02	8,97978 44	8,64939 74	1,12352 09	64
15	0,26332 52	8,95774 61	8,64799 98	1,14107 59	65
16	0,28088 02	8,93758 43	8,64666 16	1,15863 10	66
17	0,29843 52	8,91906 43	8,64538 04	1,17618 60	67
18	0,31599 03	8,90199 19	8,64415 35	1,19374 10	68
19	0,33354 53	8,88620 44	8,64297 84	1,21129 60	69
20	0,35110 03	8,87156 42	8,64185 29	1,22885 10	70
21	0,36865 53	8,85795 38	8,64077 48	1,24640 60	71
22	0,38621 03	8,84527 23	8,63974 18	1,26396 10	72
23	0,40376 53	8,83343 21	8,63875 20	1,28151 61	73
24	0,42132 03	8,82235 70	8,63780 36	1,29907 11	74
25	0,43887 54	8,81198 01	8,63689 47	1,31662 61	75
26	0,45643 04	8,80224 25	8,63602 38	1,33418 11	76
27	0,47398 54	8,79309 17	8,63518 88	1,35173 61	77
28	0,49154 04	8,78448 13	8,63438 84	1,36929 11	78
29	0,50909 54	8,77636 97	8,63362 11	1,38684 61	79
30	0,52665 04	8,76871 95	8,63288 56	1,40440 12	80
31	0,54420 54	8,76149 70	8,63218 03	1,42195 62	81
32	0,56176 05	8,75467 20	8,63150 40	1,43951 12	82
33	0,57931 55	8,74821 68	8,63085 55	1,45706 62	83
34	0,59687 05	8,74210 64	8,63023 37	1,47462 12	84
35	0,61442 55	8,73631 76	8,62963 73	1,49217 62	85
36	0,63198 05	8,73083 04	8,62906 52	1,50973 12	86
37	0,64953 55	8,72562 48	8,62851 67	1,52728 63	87
38	0,66709 05	8,72068 34	8,62799 04	1,54484 13	88
39	0,68464 56	8,71599 02	8,62748 56	1,56239 63	89
40	0,70220 06	8,71153 00	8,62700 13	1,57995 13	90
41	0,71975 56	8,70728 94	8,62653 67	1,59750 63	91
42	0,73731 06	8,70325 53	8,62609 10	1,61506 13	92
43	0,75486 56	8,69941 61	8,62566 34	1,63261 63	93
44	0,77242 06	8,69576 03	8,62525 32	1,65017 14	94
45	0,78997 56	8,69227 85	8,62485 95	1,66772 64	95
46	0,80753 07	8,68896 05	8,62448 18	1,68528 14	96
47	0,82508 57	8,68579 77	8,62411 93	1,70283 64	97
48	0,84264 07	8,68278 17	8,62377 15	1,72039 14	98
49	0,86019 57	8,67990 48	8,62343 77	1,73794 64	99
50	0,87775 07	8,67715 96	8,62311 74	1,75550 14	100
			8,61542 40		Perpét.

4 $\frac{1}{4}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (4 $\frac{1}{4}$)	C^t log f_n (4 $\frac{1}{4}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01807 61	0,01807 61	8,68376 19	0,92187 92	51
2	0,03615 21	9,72599 01	8,68136 08	0,93995 53	52
3	0,05422 82	9,55878 01	8,67907 02	0,95803 14	53
4	0,07230 43	9,44266 01	8,67688 42	0,97610 74	54
5	0,09038 03	9,35450 62	8,67479 75	0,99418 35	55
6	0,10845 64	9,28401 84	8,67280 54	1,01225 96	56
7	0,12653 24	9,22570 26	8,67090 29	1,03033 56	57
8	0,14460 85	9,17627 92	8,66908 58	1,04841 17	58
9	0,16268 46	9,13363 29	8,66735 01	1,06648 78	59
10	0,18076 06	9,09631 94	8,66569 14	1,08456 38	60
11	0,19883 67	9,06330 85	8,66410 64	1,10263 99	61
12	0,21691 28	9,03333 97	8,66259 14	1,12071 59	62
13	0,23498 88	9,00733 55	8,66114 32	1,13879 20	63
14	0,25306 49	8,98334 69	8,65975 84	1,15686 81	64
15	0,27114 10	8,96151 80	8,65843 43	1,17494 41	65
16	0,28921 70	8,94156 22	8,65716 79	1,19302 02	66
17	0,30729 31	8,92324 48	8,65595 66	1,21109 63	67
18	0,32536 91	8,90637 17	8,65479 78	1,22917 23	68
19	0,34344 52	8,89078 01	8,65368 92	1,24724 84	69
20	0,36152 13	8,87633 24	8,65262 84	1,26532 45	70
21	0,37959 73	8,86291 12	8,65161 33	1,28340 05	71
22	0,39767 34	8,85041 55	8,65064 18	1,30147 66	72
23	0,41574 95	8,83875 80	8,64971 21	1,31955 26	73
24	0,43382 55	8,82786 22	8,64882 20	1,33762 87	74
25	0,45190 16	8,81766 13	8,64796 99	1,35570 48	75
26	0,46997 77	8,80809 65	8,64715 40	1,37378 08	76
27	0,48805 37	8,79911 55	8,64637 30	1,39185 69	77
28	0,50612 98	8,79067 16	8,64562 51	1,40993 30	78
29	0,52420 58	8,78272 34	8,64490 89	1,42800 90	79
30	0,54228 19	8,77523 36	8,64422 30	1,44608 51	80
31	0,56035 80	8,76816 83	8,64356 61	1,46416 12	81
32	0,57843 40	8,76149 75	8,64293 68	1,48223 72	82
33	0,59651 01	8,75519 36	8,64233 41	1,50031 33	83
34	0,61458 62	8,74923 13	8,64175 69	1,51838 93	84
35	0,63266 22	8,74358 80	8,64120 37	1,53646 54	85
36	0,65073 83	8,73824 30	8,64067 38	1,55454 15	86
37	0,66881 44	8,73317 68	8,64016 61	1,57261 75	87
38	0,68689 04	8,72837 21	8,63967 97	1,59069 36	88
39	0,70496 65	8,72381 26	8,63921 36	1,60876 97	89
40	0,72304 25	8,71948 36	8,63876 70	1,62684 57	90
41	0,74111 86	8,71537 12	8,63833 91	1,64492 18	91
42	0,75919 47	8,71146 29	8,63792 89	1,66299 79	92
43	0,77727 07	8,70774 66	8,63753 58	1,68107 39	93
44	0,79534 68	8,70421 13	8,63715 92	1,69915 00	94
45	0,81342 29	8,70084 71	8,63679 81	1,71722 60	95
46	0,83149 89	8,69764 42	8,63645 21	1,73530 21	96
47	0,84957 50	8,69459 41	8,63612 04	1,75337 82	97
48	0,86765 11	8,69168 82	8,63580 26	1,77145 42	98
49	0,88572 71	8,68891 89	8,63549 78	1,78953 03	99
50	0,90380 32	8,68627 91	8,63520 58	1,80760 64	100
			8,62838 89		Perpét.

4 $\frac{3}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (4 $\frac{3}{8}$)	C^t log f_n (4 $\frac{3}{8}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01859 65	0,01859 65	8,69286 38	0,94842 09	51
2	0,03719 30	9,72676 52	8,69055 98	0,96701 74	52
3	0,05578 95	9,55980 63	8,68836 38	0,98561 39	53
4	0,07438 60	9,44393 37	8,68627 02	1,00421 04	54
5	0,09298 24	9,35602 35	8,68427 38	1,02280 69	55
6	0,11157 89	9,28577 58	8,68236 96	1,04140 34	56
7	0,13017 54	9,22769 65	8,68055 30	1,05999 98	57
8	0,14877 19	9,17850 60	8,67881 98	1,07859 63	58
9	0,16736 84	9,13608 89	8,67716 57	1,09719 28	59
10	0,18596 49	9,09900 10	8,67558 67	1,11578 93	60
11	0,20456 14	9,06621 22	8,67407 93	1,13438 58	61
12	0,22315 79	9,03696 18	8,67263 99	1,15298 23	62
13	0,24175 44	9,01067 23	8,67126 54	1,17157 88	63
14	0,26035 08	8,98689 51	8,66995 25	1,19017 53	64
15	0,27894 73	8,96527 40	8,66869 85	1,20877 18	65
16	0,29754 38	8,94552 24	8,66750 03	1,22736 82	66
17	0,31614 03	8,92740 58	8,66635 55	1,24596 47	67
18	0,33473 68	8,91073 00	8,66526 14	1,26456 12	68
19	0,35333 33	8,89533 21	8,66421 58	1,28315 78	69
20	0,37192 98	8,88107 48	8,66321 63	1,30175 42	70
21	0,39052 63	8,86784 06	8,66226 11	1,32035 07	71
22	0,40912 27	8,85552 85	8,66134 77	1,33894 72	72
23	0,42771 92	8,84405 12	8,66047 44	1,35754 37	73
24	0,44631 57	8,83333 23	8,65963 94	1,37614 01	74
25	0,46491 22	8,82330 50	8,65884 09	1,39473 66	75
26	0,48350 87	8,81391 05	8,65807 72	1,41333 31	76
27	0,50210 52	8,80509 64	8,65734 67	1,43192 96	77
28	0,52070 17	8,79681 64	8,65664 81	1,45052 61	78
29	0,53929 82	8,78902 88	8,65597 98	1,46912 26	79
30	0,55789 47	8,78169 64	8,65534 05	1,48771 91	80
31	0,57649 11	8,77478 56	8,65472 89	1,50631 56	81
32	0,59508 76	8,76826 60	8,65414 36	1,52491 21	82
33	0,61368 41	8,76211 02	8,65358 36	1,54350 85	83
34	0,63228 06	8,75629 31	8,65304 78	1,56210 50	84
35	0,65087 71	8,75079 21	8,65253 53	1,58070 15	85
36	0,66947 36	8,74558 62	8,65204 46	1,59929 80	86
37	0,68807 01	8,74065 64	8,65157 50	1,61789 45	87
38	0,70666 66	8,73598 50	8,65112 55	1,63649 10	88
39	0,72526 31	8,73155 62	8,65069 54	1,65508 75	89
40	0,74385 95	8,72735 50	8,65028 37	1,67368 40	90
41	0,76245 60	8,72336 76	8,64988 95	1,69228 05	91
42	0,78105 25	8,71958 14	8,64951 24	1,71087 69	92
43	0,79964 90	8,71598 45	8,64915 13	1,72947 34	93
44	0,81824 55	8,71256 62	8,64880 56	1,74806 99	94
45	0,83684 20	8,70931 63	8,64847 46	1,76666 64	95
46	0,85543 85	8,70622 51	8,64815 78	1,78526 29	96
47	0,87403 50	8,70328 41	8,64785 44	1,80385 94	97
48	0,89263 14	8,70048 49	8,64756 40	1,82245 59	98
49	0,91122 79	8,69781 98	8,64728 59	1,84105 24	99
50	0,92982 44	8,69528 17	8,64701 96	1,85964 88	100
			8,64097 81		Perpét.

4 ½ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (4 ½)	C^t log f_n (4 ½)	log r^n	ANNÉES.
1	0,01911 63	0,01911 63	8,70184 69	0,97493 08	51
2	0,03823 26	9,72753 93	8,69963 65	0,99404 71	52
3	0,05734 89	9,56083 09	8,69753 17	1,01316 34	53
4	0,07646 52	9,44520 50	8,69552 71	1,03227 97	54
5	0,09558 15	9,35753 78	8,69361 74	1,05139 60	55
6	0,11469 77	9,28752 94	8,69179 78	1,07051 23	56
7	0,13381 40	9,22968 56	8,69006 37	1,08962 86	57
8	0,15293 03	9,18072 68	8,68841 06	1,10874 48	58
9	0,17204 66	9,13853 79	8,68683 47	1,12786 11	59
10	0,19116 29	9,10167 43	8,68533 19	1,14697 74	60
11	0,21027 92	9,06910 61	8,68389 87	1,16609 37	61
12	0,22939 55	9,04007 27	8,68253 16	1,18521 00	62
13	0,24851 18	9,01399 67	8,68122 74	1,20432 63	63
14	0,26762 81	8,99042 91	8,67998 31	1,22344 26	64
15	0,28674 44	8,96901 41	8,67879 57	1,24255 89	65
16	0,30586 06	8,94946 50	8,67766 24	1,26167 52	66
17	0,32497 69	8,93154 73	8,67658 07	1,28079 15	67
18	0,34409 32	8,91506 67	8,67554 80	1,29990 78	68
19	0,36320 95	8,89986 07	3,67456 22	1,31902 40	69
20	0,38232 58	8,88579 16	8,67362 09	1,33814 03	70
21	0,40144 21	8,87274 21	8,67272 20	1,35725 66	71
22	0,42055 84	8,86061 13	8,67186 36	1,37637 29	72
23	0,43967 47	8,84931 18	8,67104 37	1,39548 92	73
24	0,45879 10	8,83876 74	8,67026 06	1,41460 55	74
25	0,47790 73	8,82891 13	8,66951 25	1,43372 18	75
26	0,49702 36	8,81968 46	8,66879 78	1,45283 81	76
27	0,51613 98	8,81103 49	8,66811 51	1,47195 44	77
28	0,53525 61	8,80291 60	8,66746 27	1,49107 07	78
29	0,55437 24	8,79528 63	8,66683 93	1,51018 69	79
30	0,57348 87	8,78810 85	8,66624 36	1,52930 32	80
31	0,59260 50	8,78134 92	8,66567 43	1,54841 95	81
32	0,61172 13	8,77497 81	8,66513 02	1,56753 58	82
33	0,63083 76	8,76896 74	8,66461 02	1,58665 21	83
34	0,64995 39	8,76329 26	8,66411 32	1,60576 84	84
35	0,66907 02	8,75793 06	8,66363 81	1,62488 47	85
36	0,68818 65	8,75286 08	8,66318 40	1,64400 10	86
37	0,70730 27	8,74806 41	8,66274 98	1,66311 73	87
38	0,72641 90	8,74352 30	8,66233 48	1,68223 36	88
39	0,74553 53	8,73922 14	8,66193 80	1,70134 98	89
40	0,76465 16	8,73514 48	8,66155 86	1,72046 61	90
41	0,78376 79	8,73127 91	8,66119 59	1,73958 24	91
42	0,80288 42	8,72761 18	8,66084 91	1,75869 87	92
43	0,82200 05	8,72413 12	8,66051 74	1,77781 50	93
44	0,84111 68	8,72082 64	8,66020 04	1,79693 13	94
45	0,86023 31	8,71768 73	8,65989 71	1,81604 76	95
46	0,87934 94	8,71470 45	8,65960 71	1,83516 39	96
47	0,89846 57	8,71186 91	8,65932 98	1,85428 02	97
48	0,91758 19	8,70917 31	8,65906 46	1,87339 65	98
49	0,93669 82	8,70660 87	8,65881 10	1,89251 28	99
50	0,95581 45	8,70416 90	8,65856 85	1,91162 90	100
			8,65321 25		Perpét.

$4\frac{5}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log $f_n(4\frac{5}{8})$	C^t log $f_n(4\frac{5}{8})$	log r^n	ANNÉES.
1	0,01963 55	0,01963 55	8,71071 30	1,00140 90	51
2	0,03927 09	9,72831 23	8,70859 26	1,02104 45	52
3	0,05890 64	9,56185 38	8,70657 58	1,04068 00	53
4	0,07854 19	9,44647 40	8,70465 67	1,06031 54	54
5	0,09817 74	9,35904 90	8,70283 03	1,07995 09	55
6	0,11781 28	9,28927 90	8,70109 20	1,09958 64	56
7	0,13744 83	9,23166 98	8,69943 69	1,11922 18	57
8	0,15708 38	9,18294 19	8,69786 08	1,13885 73	58
9	0,17671 92	9,14097 98	8,69635 97	1,15849 28	59
10	0,19635 47	9,10433 93	8,69492 98	1,17812 83	60
11	0,21599 02	9,07199 05	8,69356 76	1,19776 37	61
12	0,23562 57	9,04317 27	8,69226 94	1,21739 92	62
13	0,25526 11	9,01730 84	8,69103 24	1,23703 47	63
14	0,27489 66	8,99394 89	8,68985 32	1,25667 01	64
15	0,29453 21	8,97273 83	8,68872 92	1,27630 56	65
16	0,31416 75	8,95338 99	8,68765 77	1,29594 11	66
17	0,33380 30	8,93566 93	8,68663 58	1,31557 66	67
18	0,35343 85	8,91938 21	8,68566 15	1,33521 20	68
19	0,37307 39	8,90436 58	8,68473 23	1,35484 75	69
20	0,39270 94	8,89048 29	8,68384 59	1,37448 30	70
21	0,41234 49	8,87761 60	8,68300 05	1,39411 84	71
22	0,43198 04	8,86566 43	8,68219 39	1,41375 39	72
23	0,45161 58	8,85454 04	8,68142 44	1,43338 94	73
24	0,47125 13	8,84416 79	8,68069 03	1,45302 49	74
25	0,49088 68	8,83448 05	8,67998 95	1,47266 03	75
26	0,51052 22	8,82541 88	8,67932 11	1,49229 58	76
27	0,53015 77	8,81693 11	8,67868 30	1,51193 13	77
28	0,54979 32	8,80897 07	8,67807 40	1,53156 67	78
29	0,56942 87	8,80149 62	8,67749 28	1,55120 22	79
30	0,58906 41	8,79447 03	8,67693 79	1,57083 77	80
31	0,60869 96	8,78785 96	8,67640 83	1,59047 32	81
32	0,62833 51	8,78163 38	8,67590 27	1,61010 86	82
33	0,64797 05	8,77576 56	8,67542 00	1,62974 41	83
34	0,66760 60	8,77022 99	8,67495 90	1,64937 96	84
35	0,68724 15	8,76500 40	8,67451 90	1,66901 50	85
36	0,70687 70	8,76006 73	8,67409 89	1,68865 05	86
37	0,72651 24	8,75540 06	8,67369 77	1,70828 60	87
38	0,74614 79	8,75098 67	8,67331 45	1,72792 14	88
39	0,76578 34	8,74680 94	8,67294 85	1,74755 69	89
40	0,78541 88	8,74285 39	8,67259 91	1,76719 24	90
41	0,80505 43	8,73910 67	8,67226 54	1,78682 79	91
42	0,82468 98	8,73555 52	8,67194 66	1,80646 33	92
43	0,84432 53	8,73218 74	8,67164 22	1,82609 88	93
44	0,86396 07	8,72899 29	8,67135 14	1,84573 43	94
45	0,88359 62	8,72596 13	8,67107 38	1,86536 97	95
46	0,90323 17	8,72308 35	8,67080 84	1,88500 52	96
47	0,92286 71	8,72035 04	8,67055 51	1,90464 07	97
48	0,94250 26	8,71775 43	8,67031 30	1,92427 62	98
49	0,96213 81	8,71528 73	8,67008 17	1,94391 16	99
50	0,98177 36	8,71294 24	8,66986 08	1,96354 71	100
			8,66511 17		Perpét.

4 $\frac{3}{4}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (4 $\frac{3}{4}$)	C^t log f_n (4 $\frac{3}{4}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,02015 40	0,02015 40	8,71946 35	1,02785 56	51
2	0,04030 81	9,72908 42	8,71743 01	1,04800 96	52
3	0,06046 21	9,56287 51	8,71549 78	1,06816 37	53
4	0,08061 61	9,44774 06	8,71366 10	1,08831 77	54
5	0,10077 02	9,36055 72	8,71191 48	1,10847 17	55
6	0,12092 42	9,29102 49	8,71025 44	1,12862 58	56
7	0,14107 82	9,23364 92	8,70867 50	1,14877 98	57
8	0,16123 23	9,18515 09	8,70717 27	1,16893 38	58
9	0,18138 63	9,14341 46	8,70574 32	1,18908 79	59
10	0,20154 03	9,10699 61	8,70438 30	1,20924 19	60
11	0,22169 43	9,07486 53	8,70308 84	1,22939 59	61
12	0,24184 84	9,04626 17	8,70185 62	1,24955 00	62
13	0,26200 24	9,02060 78	8,70068 30	1,26970 40	63
14	0,28215 64	8,99745 47	8,69956 60	1,28985 80	64
15	0,30231 05	8,97644 69	8,69850 24	1,31001 21	65
16	0,32246 45	8,95729 73	8,69748 94	1,33016 61	66
17	0,34261 85	8,93977 19	8,69652 44	1,35032 01	67
18	0,36277 26	8,92367 61	8,69560 54	1,37047 41	68
19	0,38292 66	8,90884 76	8,69472 97	1,39062 82	69
20	0,40308 06	8,89514 88	8,69389 54	1,41078 22	70
21	0,42323 47	8,88246 23	8,69310 05	1,43093 62	71
22	0,44338 87	8,87068 74	8,69234 29	1,45109 03	72
23	0,46354 27	8,85973 67	8,69162 10	1,47124 43	73
24	0,48369 68	8,84953 41	8,69093 28	1,49139 83	74
25	0,50385 08	8,84001 27	8,69027 69	1,51155 24	75
26	0,52400 48	8,83111 39	8,68965 17	1,53170 64	76
27	0,54415 89	8,82278 54	8,68905 56	1,55186 04	77
28	0,56431 29	8,81498 08	8,68848 74	1,57201 45	78
29	0,58446 69	8,80765 87	8,68794 56	1,59216 85	79
30	0,60462 09	8,80078 20	8,68742 90	1,61232 25	80
31	0,62477 50	8,79431 72	8,68693 64	1,63247 66	81
32	0,64492 90	8,78823 40	8,68646 64	1,65263 06	82
33	0,66508 30	8,78250 53	8,68601 87	1,67278 46	83
34	0,68523 71	8,77710 58	8,68559 15	1,69293 87	84
35	0,70539 11	8,77201 31	8,68518 40	1,71309 27	85
36	0,72554 51	8,76720 63	8,68479 55	1,73324 67	86
37	0,74569 92	8,76266 67	8,68442 47	1,75340 07	87
38	0,76585 32	8,75837 68	8,68407 12	1,77355 48	88
39	0,78600 72	8,75432 06	8,68373 39	1,79370 88	89
40	0,80616 13	8,75048 34	8,68341 22	1,81386 28	90
41	0,82631 53	8,74685 14	8,68310 52	1,83401 69	91
42	0,84646 93	8,74341 23	8,68281 24	1,85417 09	92
43	0,86662 34	8,74015 43	8,68253 31	1,87432 49	93
44	0,88677 74	8,73706 68	8,68226 66	1,89447 90	94
45	0,90693 14	8,73413 95	8,68201 23	1,91463 30	95
46	0,92708 55	8,73136 33	8,68176 97	1,93478 70	96
47	0,94723 95	8,72872 94	8,68153 83	1,95494 11	97
48	0,96739 35	8,72622 99	8,68131 74	1,97509 51	98
49	0,98754 76	8,72385 71	8,68110 67	1,99524 91	99
50	1,00770 16	8,72160 37	8,68090 56	2,01540 32	100
			8,67669 36		Perpét.

4 $\frac{7}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log $f_n(4\frac{7}{8})$	C^t log $f_n(4\frac{7}{8})$	log r^n	ANNÉES.
1	0,02067 20	0,02067 20	8,72810 03	1,05427 07	51
2	0,04134 39	9,72985 50	8,72615 06	1,07494 26	52
3	0,06201 59	9,56389 48	8,72429 97	1,09561 46	53
4	0,08268 79	9,44900 52	8,72254 20	1,11628 66	54
5	0,10335 99	9,36206 24	8,72087 27	1,13695 86	55
6	0,12403 18	9,29277 85	8,71928 69	1,15763 05	56
7	0,14470 38	9,23562 38	8,71778 03	1,17830 25	57
8	0,16537 58	9,18735 42	8,71634 85	1,19897 45	58
9	0,18604 78	9,14584 26	8,71498 77	1,21964 65	59
10	0,20671 97	9,10964 48	8,71369 41	1,24031 84	60
11	0,22739 17	9,07773 07	8,71246 42	1,26099 04	61
12	0,24806 37	9,04933 97	8,71129 47	1,28166 24	62
13	0,26873 57	9,02389 47	8,71018 25	1,30233 44	63
14	0,28940 76	9,00094 66	8,70912 46	1,32300 63	64
15	0,31007 96	8,98013 97	8,70811 83	1,34367 83	65
16	0,33075 16	8,96118 75	8,70716 10	1,36435 03	66
17	0,35142 36	8,94385 53	8,70625 00	1,38502 22	67
18	0,37209 55	8,92794 91	8,70538 33	1,40569 42	68
19	0,39276 75	8,91330 63	8,70455 84	1,42636 62	69
20	0,41343 95	8,89978 94	8,70377 33	1,44703 82	70
21	0,43411 15	8,88728 13	8,70302 61	1,46771 01	71
22	0,45478 34	8,87568 10	8,70231 47	1,48838 21	72
23	0,47545 54	8,86490 12	8,70163 75	1,50905 41	73
24	0,49612 74	8,85486 59	8,70099 29	1,52972 61	74
25	0,51679 93	8,84550 83	8,70037 90	1,55039 80	75
26	0,53747 13	8,83676 96	8,69979 44	1,57107 00	76
27	0,55814 33	8,82859 78	8,69923 78	1,59174 20	77
28	0,57881 53	8,82094 66	8,69870 77	1,61241 40	78
29	0,59948 72	8,81377 44	8,69820 29	1,63308 59	79
30	0,62015 92	8,80704 41	8,69772 21	1,65375 79	80
31	0,64083 12	8,80072 24	8,69726 41	1,67442 99	81
32	0,66150 32	8,79477 91	8,69682 78	1,69510 19	82
33	0,68217 51	8,78918 68	8,69641 23	1,71577 38	83
34	0,70284 71	8,78392 07	8,69601 64	1,73644 58	84
35	0,72351 91	8,77895 82	8,69563 93	1,75711 78	85
36	0,74419 11	8,77427 86	8,69528 00	1,77778 97	86
37	0,76486 30	8,76986 30	8,69493 77	1,79846 17	87
38	0,78553 50	8,76569 40	8,69461 16	1,81913 37	88
39	0,80620 70	8,76175 59	8,69430 07	1,83980 57	89
40	0,82687 90	8,75803 37	8,69400 47	1,86047 76	90
41	0,84755 09	8,75451 40	8,69372 25	1,88114 96	91
42	0,86822 29	8,75118 42	8,69345 36	1,90182 16	92
43	0,88889 49	8,74803 29	8,69319 74	1,92249 36	93
44	0,90956 68	8,74504 91	8,69295 32	1,94316 55	94
45	0,93023 88	8,74222 31	8,69272 05	1,96383 75	95
46	0,95091 08	8,73954 54	8,69249 88	1,98450 95	96
47	0,97158 28	8,73700 75	8,69228 74	2,00518 15	97
48	0,99225 47	8,73460 12	8,69208 60	2,02585 34	98
49	1,01292 67	8,73231 93	8,69189 40	2,04652 54	99
50	1,03359 87	8,73015 45	8,69171 11	2,06719 74	100
			8,68797 46		Perpét.

5 pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n(5)	C^t log f_n(5)	log r^n	ANNÉES.
1	0,02118 93	0,02118 93	8,73632 49	1,08065 43	51
2	0,04237 86	9,73062 48	8,73475 58	1,10184 36	52
3	0,06356 79	9,56491 28	8,73298 32	1,12303 28	53
4	0,08475 72	9,45026 73	8,73130 16	1,14422 21	54
5	0,10594 65	9,36356 45	8,72970 62	1,16541 14	55
6	0,12713 58	9,29450 47	8,72819 22	1,18660 07	56
7	0,14832 51	9,23759 36	8,72675 52	1,20779 00	57
8	0,16951 44	9,18955 15	8,72539 10	1,22897 93	58
9	0,19070 37	9,14826 35	8,72409 57	1,25016 86	59
10	0,21189 30	9,11228 51	8,72286 57	1,27135 79	60
11	0,23308 23	9,08058 65	8,72169 75	1,29254 72	61
12	0,25427 16	9,05240 70	8,72058 78	1,31373 65	62
13	0,27546 09	9,02716 92	8,71953 37	1,33492 58	63
14	0,29665 02	9,00442 44	8,71853 20	1,35611 51	64
15	0,31783 95	8,98381 70	8,71758 02	1,37730 44	65
16	0,33902 88	8,96506 01	8,71667 58	1,39849 37	66
17	0,36021 81	8,94791 94	8,71581 60	1,41968 30	67
18	0,38140 74	8,93220 08	8,71499 88	1,44087 23	68
19	0,40259 67	8,91774 18	8,71422 21	1,46206 16	69
20	0,42378 60	8,90440 49	8,71348 34	1,48325 09	70
21	0,44497 53	8,89207 30	8,71278 11	1,50444 02	71
22	0,46616 46	8,88064 50	8,71211 34	1,52562 95	72
23	0,48735 39	8,87003 40	8,71147 85	1,54681 88	73
24	0,50854 32	8,86016 37	8,71087 46	1,56800 81	74
25	0,52973 25	8,85096 74	8,71030 03	1,58919 74	75
26	0,55092 18	8,84238 66	8,70975 40	1,61038 67	76
27	0,57211 11	8,83436 89	8,70923 43	1,63157 60	77
28	0,59330 04	8,82686 83	8,70874 00	1,65276 53	78
29	0,61448 97	8,81984 33	8,70826 98	1,67395 46	79
30	0,63567 90	8,81325 70	8,70782 24	1,69514 39	80
31	0,65686 83	8,80707 56	8,70739 67	1,71633 32	81
32	0,67805 76	8,80126 94	8,70699 17	1,73752 25	82
33	0,69924 69	8,79581 08	8,70660 63	1,75871 18	83
34	0,72043 62	8,79067 52	8,70623 97	1,77990 11	84
35	0,74162 55	8,78584 01	8,70589 07	1,80109 04	85
36	0,76281 48	8,78128 46	8,70555 86	1,82227 97	86
37	0,78400 41	8,77699 01	8,70524 26	1,84346 90	87
38	0,80519 34	8,77293 92	8,70494 18	1,86465 83	88
39	0,82638 27	8,76911 60	8,70465 56	1,88584 76	89
40	0,84757 20	8,76550 58	8,70438 32	1,90703 69	90
41	0,86876 13	8,76209 53	8,70412 39	1,92822 62	91
42	0,88995 06	8,75887 19	8,70387 70	1,94941 55	92
43	0,91113 99	8,75582 41	8,70364 21	1,97060 48	93
44	0,93232 92	8,75294 11	8,70341 85	1,99179 41	94
45	0,95351 85	8,75021 31	8,70320 56	2,01298 34	95
46	0,97470 78	8,74763 09	8,70300 30	2,03417 27	96
47	0,99589 71	8,74518 58	8,70281 01	2,05536 20	97
48	1,01708 64	8,74286 98	8,70262 64	2,07655 13	98
49	1,03827 57	8,74067 57	8,70245 16	2,09774 06	99
50	1,05946 50	8,73859 61	8,70228 52	2,11892 99	100
			8,69897 00		perpét.

5 $\frac{1}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (5 $\frac{1}{8}$)	C^t log f_n (5 $\frac{1}{8}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,02170 60	0,02170 60	8,74503 90	1,10700 64	51
2	0,04341 20	9,73139 34	8,74324 76	1,12871 25	52
3	0,06511 80	9,56592 92	8,74155 02	1,15041 85	53
4	0,08682 40	9,45152 72	8,73994 18	1,17212 45	54
5	0,10853 00	9,36506 37	8,73841 73	1,19383 05	55
6	0,13023 61	9,29623 89	8,73697 20	1,21553 65	56
7	0,15194 21	9,23955 85	8,73560 17	1,23724 25	57
8	0,17364 81	9,19174 31	8,73430 22	1,25894 85	58
9	0,19535 41	9,15067 75	8,73306 96	1,28065 45	59
10	0,21706 01	9,11491 73	8,73190 03	1,30236 05	60
11	0,23876 61	9,08343 27	8,73079 10	1,32406 65	61
12	0,26047 21	9,05546 32	8,72973 84	1,34577 25	62
13	0,28217 81	9,03043 14	8,72873 94	1,36747 86	63
14	0,30388 41	9,00788 84	8,72779 13	1,38918 46	64
15	0,32559 01	8,98747 86	8,72689 12	1,41089 06	65
16	0,34729 61	8,96891 55	8,72603 69	1,43259 66	66
17	0,36900 21	8,95196 44	8,72522 58	1,45430 26	67
18	0,39070 82	8,93643 16	8,72445 55	1,47600 86	68
19	0,41241 42	8,92215 44	3,72372 41	1,49771 46	69
20	0,43412 02	8,90899 55	8,72302 95	1,51942 06	70
21	0,45582 62	8,89683 75	8,72236 98	1,54112 66	71
22	0,47753 22	8,88557 98	8,72174 32	1,56283 26	72
23	0,49923 82	8,87513 51	8,72114 79	1,58453 86	73
24	0,52094 42	8,86542 75	8,72058 25	1,60624 47	74
25	0,54265 02	8,85639 03	8,72004 53	1,62795 07	75
26	0,56435 62	8,84796 48	8,71953 49	1,64965 67	76
27	0,58606 22	8,84009 88	8,71904 99	1,67136 27	77
28	0,60776 82	8,83274 64	8,71858 91	1,69306 87	78
29	0,62947 43	8,82586 60	8,71815 11	1,71477 47	79
30	0,65118 03	8,81942 08	8,71773 50	1,73648 07	80
31	0,67288 63	8,81337 71	8,71733 95	1,75818 67	81
32	0,69459 23	8,80770 53	8,71696 36	1,77989 27	82
33	0,71629 83	8,80237 78	8,71660 65	1,80159 87	83
34	0,73800 43	8,79736 98	8,71626 69	1,82330 47	84
35	0,75971 03	8,79265 92	8,71594 41	1,84501 07	85
36	0,78141 63	8,78822 51	8,71563 73	1,86671 68	86
37	0,80312 23	8,78404 87	8,71534 56	1,88842 28	87
38	0,82482 83	8,78011 28	8,71506 83	1,91012 88	88
39	0,84653 43	8,77640 17	8,71480 48	1,93183 48	89
40	0,86824 04	8,77290 08	8,71455 43	1,95354 08	90
41	0,88994 64	8,76959 63	8,71431 60	1,97524 68	91
42	0,91165 24	8,76647 63	8,71408 96	1,99695 28	92
43	0,93335 84	8,76352 90	8,71387 43	2,01865 88	93
44	0,95506 44	8,76074 38	8,71366 95	2,04036 48	94
45	0,97677 04	8,75811 08	8,71347 48	2,06207 08	95
46	0,99847 64	8,75562 10	8,71328 97	2,08377 68	96
47	1,02018 24	8,75326 57	8,71311 37	2,10548 29	97
48	1,04188 84	8,75103 70	8,71294 64	2,12718 89	98
49	1,06359 44	8,74892 76	8,71278 73	2,14889 49	99
50	1,08530 04	8,74693 04	8,71263 60	2,17060 09	100
			8,70969 39		Perpét.

$5\frac{1}{4}$ pour 100.

ANNÉES.	$\log r^n$	$C^t \log f_n (5\frac{1}{4})$	$C^t \log f_n (5\frac{1}{4})$	$\log r^n$	ANNÉES.
1	0,02222 21	0,02222 21	8,75334 45	1,13332 73	51
2	0,04444 42	9,73216 10	8,75162 77	1,15554 94	52
3	0,06666 63	9,56694 40	8,75000 28	1,17777 15	53
4	0,08888 84	9,45278 48	8,74846 45	1,19999 36	54
5	0,11111 05	9,36655 99	8,74700 80	1,22221 57	55
6	0,13333 26	9,29796 92	8,74562 87	1,24443 79	56
7	0,15555 47	9,24151 87	8,74432 23	1,26666 00	57
8	0,17777 68	9,19392 89	8,74308 46	1,28888 21	58
9	0,19999 89	9,15308 45	8,74191 19	1,31110 42	59
10	0,22222 10	9,11754 15	8,74080 07	1,33332 63	60
11	0,24444 31	9,08626 97	8,73974 74	1,35554 84	61
12	0,26666 53	9,05850 87	8,73874 92	1,37777 05	62
13	0,28888 74	9,03368 13	8,73780 28	1,39999 26	63
14	0,31110 95	9,01133 85	8,73690 55	1,42221 47	64
15	0,33333 16	8,99112 48	8,73605 47	1,44443 68	65
16	0,35555 37	8,97275 36	8,73524 79	1,46665 89	66
17	0,37777 58	8,95599 05	8,73448 27	1,48888 10	67
18	0,39999 79	8,94064 15	8,73375 69	1,51110 31	68
19	0,42222 00	8,92654 41	8,73306 85	1,53332 52	69
20	0,44444 21	8,91356 11	8,73241 53	1,55554 73	70
21	0,46666 42	8,90157 50	8,73179 58	0,57776 94	71
22	0,48888 63	8,89048 55	8,73120 78	1,59999 15	72
23	0,51110 84	8,88020 51	8,73065 00	1,62221 36	73
24	0,53333 05	8,87065 78	8,73012 07	1,64443 57	74
25	0,55555 26	8,86177 73	8,72961 84	1,66665 78	75
26	0,57777 47	8,85350 45	8,72914 16	1,68887 99	76
27	0,59999 68	8,84578 80	8,72868 91	1,71110 20	77
28	0,62221 89	8,83858 11	8,72825 97	1,73332 42	78
29	0,64444 10	8,83184 28	8,72785 20	1,75554 63	79
30	0,66666 31	8,82553 61	8,72746 50	1,77776 84	80
31	0,68888 52	8,81962 75	8,72709 77	1,79999 05	81
32	0,71110 73	8,81408 72	8,72674 90	1,82221 26	82
33	0,73332 94	8,80888 80	8,72641 79	1,84443 47	83
34	0,75555 16	8,80400 51	8,72610 36	1,86665 68	84
35	0,77777 37	8,79941 61	8,72580 51	1,88887 89	85
36	0,79999 58	8,79510 05	8,72552 17	1,91110 10	86
37	0,82221 79	8,79103 94	8,72525 27	1,93332 31	87
38	0,84444 00	8,78721 58	8,72499 72	1,95554 52	88
39	0,86666 21	8,78361 39	8,72475 46	1,97776 73	89
40	0,88888 42	8,78021 91	8,72452 42	1,99998 94	90
41	0,91110 63	8,77701 81	8,72430 55	2,02221 15	91
42	0,93332 84	8,77399 84	8,72409 77	2,04443 36	92
43	0,95555 05	8,77114 85	8,72390 04	2,06665 57	93
44	0,97777 26	8,76845 82	8,72371 31	2,08887 78	94
45	0,99999 47	8,76591 74	8,72353 51	2,11109 99	95
46	1,02221 68	8,76351 69	8,72336 61	2,13332 20	96
47	1,04443 89	8,76124 86	8,72320 55	2,15554 41	97
48	1,06666 10	8,75910 41	8,72305 31	2,17776 62	98
49	1,08888 31	8,75707 65	8,72290 84	2,19998 83	99
50	1,11110 52	8,75515 88	8,72277 07	2,22221 05	100
			8,72015 93		Perpét.

5 $\frac{3}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (5 $\frac{3}{8}$)	C^t log f_n (5 $\frac{3}{8}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,02273 76	0,02273 76	8,76154 27	1,15961 70	51
2	0,04547 52	9,73292 75	8,75989 78	1,18235 46	52
3	0,06821 28	9,56795 73	8,75834 25	1,20509 21	53
4	0,09095 04	9,45404 02	8,75687 16	1,22782 97	54
5	0,11368 79	9,36805 31	8,75548 05	1,25056 73	55
6	0,13642 55	9,29969 57	8,75416 42	1,27330 49	56
7	0,15916 31	9,24347 41	8,75291 90	1,29604 25	57
8	0,18190 07	9,19609 89	8,75174 04	1,31878 01	58
9	0,20463 83	9,15548 48	8,75062 50	1,34151 77	59
10	0,22737 59	9,12015 75	8,74956 91	1,36425 53	60
11	0,25011 35	9,08909 72	8,74856 94	1,38699 28	61
12	0,27285 11	9,06154 34	8,74762 28	1,40973 04	62
13	0,29558 86	9,03691 89	8,74672 65	1,43246 80	63
14	0,31832 62	9,01477 48	8,74587 75	1,45520 56	64
15	0,34106 38	8,99475 54	8,74507 34	1,47794 32	65
16	0,36380 14	8,97657 46	8,74431 17	1,50068 08	66
17	0,38653 90	8,95999 76	8,74359 01	1,52341 84	67
18	0,40927 66	8,94483 07	8,74290 63	1,54615 60	68
19	0,43201 42	8,93091 12	8,74225 86	1,56889 35	69
20	0,45475 18	8,91810 20	8,74164 46	1,59163 11	70
21	0,47748 93	8,90628 57	8,74106 27	1,61436 87	71
22	0,50022 69	8,89536 21	8,74051 13	1,63710 63	72
23	0,52296 45	8,88524 37	8,73998 87	1,65984 39	73
24	0,54570 21	8,87585 47	8,73949 34	1,68258 15	74
25	0,56843 97	8,86712 84	8,73902 38	1,70531 91	75
26	0,59117 73	8,85900 62	8,73857 87	1,72805 67	76
27	0,61391 49	8,85143 64	8,73815 66	1,75079 42	77
28	0,63665 25	8,84437 27	8,73775 64	1,77353 18	78
29	0,65939 00	8,83777 40	8,73737 70	1,79626 94	79
30	0,68212 76	8,83160 32	8,73701 73	1,81900 70	80
31	0,70486 52	8,82582 71	8,73667 62	1,84174 46	81
32	0,72760 28	8,82041 58	8,73635 28	1,86448 22	82
33	0,75034 04	8,81534 22	8,73604 60	1,88721 98	83
34	0,77307 80	8,81058 15	8,73575 51	1,90995 74	84
35	0,79581 56	8,80611 14	8,73547 92	1,93269 49	85
36	0,81855 32	8,80191 15	8,73521 76	1,95543 25	86
37	0,84129 07	8,79796 30	8,73496 95	1,97817 01	87
38	0,86402 83	8,79424 89	8,73473 40	2,00090 77	88
39	0,88676 59	8,79075 33	8,73451 08	2,02364 53	89
40	0,90950 35	8,78746 19	8,73429 91	2,04638 29	90
41	0,93224 11	8,78436 12	8,73409 83	2,06912 05	91
42	0,95497 87	8,78143 91	8,73390 77	2,09185 81	92
43	0,97771 63	8,77868 41	8,73372 71	2,11459 56	93
44	1,00045 39	8,77608 56	8,73355 57	2,13733 32	94
45	1,02319 14	8,77363 39	8,73339 30	2,16007 08	95
46	1,04592 90	8,77132 01	8,73323 87	2,18280 84	96
47	1,06866 66	8,76913 57	8,73309 24	2,20554 60	97
48	1,09140 42	8,76707 27	8,73295 36	2,22828 36	98
49	1,11414 18	8,76512 41	8,73282 19	2,25102 12	99
50	1,13687 94	8,76328 28	8,73269 69	2,27375 88	100
			8,73037 85		Perpét.

5 $\frac{1}{2}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (5 $\frac{1}{2}$)	C^t log f_n (5 $\frac{1}{2}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,02325 25	0,02325 25	8,76963 55	1,18587 54	51
2	0,04650 49	9,73369 31	8,76805 96	1,20912 79	52
3	0,06975 74	9,56896 88	8,76657 12	1,23238 04	53
4	0,09300 98	9,45529 33	8,76516 51	1,25563 28	54
5	0,11626 23	9,36954 32	8,76383 64	1,27888 53	55
6	0,13951 48	9,30141 85	8,76258 08	1,30213 77	56
7	0,16276 72	9,24542 48	8,76139 40	1,32539 02	57
8	0,18601 97	9,19828 31	8,76027 21	1,34864 27	58
9	0,20927 21	9,15787 81	8,75921 14	1,37189 51	59
10	0,23252 46	9,12276 54	8,75820 82	1,39514 76	60
11	0,25577 71	9,09191 53	8,75725 94	1,41840 00	61
12	0,27902 95	9,06456 75	8,75636 22	1,44165 25	62
13	0,30228 20	9,04014 42	8,75551 34	1,46490 50	63
14	0,32553 44	9,01819 73	8,75471 04	1,48815 74	64
15	0,34878 69	8,99837 09	8,75395 06	1,51140 99	65
16	0,37203 94	8,98037 86	8,75323 16	1,53466 23	66
17	0,39529 18	8,96398 59	8,75255 12	1,55791 48	67
18	0,41854 43	8,94899 91	8,75190 72	1,58116 73	68
19	0,44179 67	8,93525 55	8,75129 77	1,60441 97	69
20	0,46504 92	8,92261 82	8,75072 08	1,62767 22	70
21	0,48830 17	8,91096 99	8,75017 47	1,65092 46	71
22	0,51155 41	8,90021 00	8,74965 76	1,67417 71	72
23	0,53480 66	8,89025 13	8,74916 81	1,69742 96	73
24	0,55805 90	8,88101 82	8,74870 46	1,72068 20	74
25	0,58131 15	8,87244 38	8,74826 57	1,74393 45	75
26	0,60456 40	8,86446 99	8,74785 02	1,76718 69	76
27	0,62781 64	8,85704 46	8,74745 66	1,79043 94	77
28	0,65106 89	8,85012 16	8,74708 39	1,81369 18	78
29	0,67432 13	8,84365 98	8,74673 09	1,83694 43	79
30	0,69757 38	8,83762 25	8,74639 67	1,86019 68	80
31	0,72082 62	8,83197 62	8,74608 00	1,88344 92	81
32	0,74407 87	8,82669 14	8,74578 00	1,90670 17	82
33	0,76733 12	8,82174 07	8,74549 60	1,92995 41	83
34	0,79058 36	8,81709 96	8,74522 68	1,95320 66	84
35	0,81383 61	8,81274 58	8,74497 18	1,97645 91	85
36	0,83708 85	8,80865 88	8,74473 04	1,99971 15	86
37	0,86034 10	8,80482 02	8,74450 16	2,02296 40	87
38	0,88359 35	8,80121 27	8,74428 49	2,04621 64	88
39	0,90684 59	8,79782 07	8,74407 95	2,06946 89	89
40	0,93009 84	8,79462 99	8,74388 49	2,09272 14	90
41	0,95335 08	8,79162 68	8,74370 06	2,11597 38	91
42	0,97660 33	8,78879 93	8,74352 59	2,13922 63	92
43	0,99985 58	8,78613 62	8,74336 05	2,16247 87	93
44	1,02310 82	8,78362 69	8,74320 36	2,18573 12	94
45	1,04636 07	8,78126 17	8,74305 52	2,20898 37	95
46	1,06961 31	8,77903 16	8,74291 44	2,23223 61	96
47	1,09286 56	8,77692 83	8,74278 10	2,25548 86	97
48	1,11611 81	8,77494 41	8,74265 45	2,27874 10	98
49	1,13937 05	8,77307 15	8,74253 48	2,30199 35	99
50	1,16262 30	8,77130 41	8,74242 13	2,32524 60	100
			8,74036 27		Perpét.

$5\frac{5}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n ($5\frac{5}{8}$)	C^t log f_n ($5\frac{5}{8}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,02376 67	0,02376 67	8,77762 42	1,21210 28	51
2	0,04753 34	9,73445 76	8,77611 49	1,23586 95	52
3	0,07130 02	9,56997 88	8,77469 07	1,25963 63	53
4	0,09506 69	9,45654 42	8,77334 67	1,28340 30	54
5	0,11883 36	9,37103 04	8,77207 81	1,30716 97	55
6	0,14260 03	9,30313 73	8,77088 05	1,33093 64	56
7	0,16636 71	9,24737 08	8,76974 98	1,35470 32	57
8	0,19013 38	9,20045 16	8,76868 19	1,37846 99	58
9	0,21390 05	9,16026 45	8,76767 32	1,40223 66	59
10	0,23766 72	9,12536 53	8,76672 05	1,42600 33	60
11	0,26143 39	9,09472 42	8,76582 04	1,44977 00	61
12	0,28520 07	9,06758 06	8,76497 00	1,47353 68	62
13	0,30896 74	9,04335 76	8,76416 63	1,49730 35	63
14	0,33273 41	9,02160 62	8,76340 69	1,52107 02	64
15	0,35650 08	8,90197 10	8,76268 91	1,54483 69	65
16	0,38026 76	8,98416 55	8,76201 06	1,56860 37	66
17	0,40403 43	8,96795 54	8,76136 92	1,59237 04	67
18	0,42780 10	8,95314 68	8,76076 29	1,61613 71	68
19	0,45156 77	8,93957 74	8,76018 97	1,63990 38	69
20	0,47533 44	8,92711 00	8,75964 76	1,66367 05	70
21	0,49910 12	8,91562 74	8,75913 51	1,68743 73	71
22	0,52286 79	8,90502 91	8,75865 03	1,71120 40	72
23	0,54663 46	8,89522 82	8,75819 18	1,73497 07	73
24	0,57040 13	8,88614 87	8,75775 84	1,75873 74	74
25	0,59416 80	8,87772 41	8,75734 84	1,78250 41	75
26	0,61793 48	8,86989 61	8,75696 05	1,80627 09	76
27	0,64170 15	8,86261 26	8,75659 36	1,83003 76	77
28	0,66546 82	8,85582 80	8,75624 66	1,85380 43	78
29	0,68923 49	8,84950 08	8,75591 83	1,87757 10	79
30	0,71300 17	8,84359 43	8,75560 77	1,90133 78	80
31	0,73676 84	8,83807 55	8,75531 38	1,92510 45	81
32	0,76053 51	8,83291 44	8,75503 57	1,94887 12	82
33	0,78430 18	8,82808 40	8,75477 27	1,97263 79	83
34	0,80806 85	8,82356 00	8,75452 38	1,99640 46	84
35	0,83183 53	8,81931 97	8,75428 84	2,02017 14	85
36	0,85560 20	8,81534 31	8,75406 54	2,04393 81	86
37	0,87936 87	8,81161 15	8,75385 46	2,06770 48	87
38	0,90313 54	8,80810 80	8,75365 50	2,09147 15	88
39	0,92690 22	8,80481 69	8,75346 62	2,11523 83	89
40	0,95066 89	8,80172 38	8,75328 74	2,13900 50	90
41	0,97443 56	8,79881 56	8,75311 84	2,16277 17	91
42	0,99820 23	8,79608 02	8,75295 82	2,18653 84	92
43	1,02196 90	8,79350 62	8,75280 68	2,21030 51	93
44	1,04573 58	8,79108 33	8,75266 34	2,23407 19	94
45	1,06950 25	8,78880 18	8,75252 77	2,25783 86	95
46	1,09326 92	8,78665 27	8,75239 93	2,28160 53	96
47	1,11703 59	8,78462 79	8,75227 77	2,30537 20	97
48	1,14080 27	8,78271 96	8,75216 27	2,32913 88	98
49	1,16456 94	8,78092 06	8,75205 38	2,35290 55	99
50	1,18833 61	8,77922 42	8,75195 07	2,37667 22	100
			8,75012 25		Perpét.

5 $\frac{3}{4}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (5 $\frac{3}{4}$)	C^t log f_n (5 $\frac{3}{4}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,02428 04	0,02428 04	8,78551 08	1,23829 92	51
2	0,04856 08	9,73522 09	8,78406 54	1,26257 96	52
3	0,07284 11	9,57098 71	8,78270 30	1,28685 99	53
4	0,09712 15	9,45779 29	8,78141 86	1,31114 03	54
5	0,12140 19	9,37251 46	8,78020 75	1,33542 07	55
6	0,14568 23	9,30495 23	8,77906 53	1,35970 11	56
7	0,16996 26	9,24931 21	8,77798 80	1,38398 14	57
8	0,19424 30	9,20261 44	8,77697 18	1,40826 18	58
9	0,21852 34	9,16264 41	8,77601 30	1,43254 22	59
10	0,24280 38	9,12795 72	8,77510 82	1,45682 26	60
11	0,26708 41	9,09752 37	8,77425 45	1,48110 29	61
12	0,29136 45	9,07058 33	8,77344 86	1,50538 33	62
13	0,31564 49	9,04655 88	8,77268 80	1,52966 37	63
14	0,33992 53	9,02500 15	8,77196 99	1,55394 41	64
15	0,36420 56	9,00555 60	8,77129 19	1,57822 44	65
16	0,38848 60	8,98793 56	8,77065 18	1,60250 48	66
17	0,41276 64	8,97190 62	8,77004 74	1,62678 52	67
18	0,43704 68	8,95727 42	8,76947 66	1,65106 56	68
19	0,46132 71	8,94387 69	8,76893 75	1,67534 59	69
20	0,48560 75	8,93157 74	8,76842 84	1,69962 63	70
21	0,50988 79	8,92025 85	8,76794 75	1,72390 67	71
22	0,53416 83	8,90981 98	8,76749 32	1,74818 71	72
23	0,55844 86	8,90017 44	8,76706 41	1,77246 74	73
24	0,58272 90	8,89124 64	8,76665 86	1,79674 78	74
25	0,60700 94	8,88296 93	8,76627 57	1,82102 82	75
26	0,63128 98	8.87528 47	8,76591 37	1,84530 86	76
27	0,65557 02	8.86814 10	8,76557 18	1,86958 90	77
28	0,67985 05	8.86149 22	8,76524 86	1,89386 93	78
29	0,70413 09	8,85529 71	8,76494 34	1,91814 97	79
30	0,72841 13	8,84951 92	8,76465 49	1,94243 01	80
31	0,75269 17	8,84412 52	8,76438 23	1,96671 05	81
32	0,77697 20	8,83908 53	8,76412 47	1,99099 08	82
33	0,80125 24	8,83437 28	8,76388 11	2,01527 12	83
34	0,82553 28	8,82996 30	8,76365 10	2,03955 16	84
35	0,84981 32	8,82583 38	8,76343 35	2,06383 20	85
36	0,87409 35	8,82196 48	8,76322 79	2,08811 23	86
37	0,89837 39	8,81833 77	8,76303 36	2,11239 27	87
38	0,92265 43	8,81493 54	8,76284 68	2,13667 31	88
39	0,94693 47	8,81174 25	8,76267 63	2,16095 35	89
40	0,97121 50	8,80874 47	8,76251 21	2,18523 38	90
41	0,99549 54	8,80592 87	8,76235 70	2,20951 42	91
42	1,01977 58	8,80328 26	8,76221 04	2,23379 46	92
43	1,04405 62	8,80079 50	8,76207 18	2,25807 50	93
44	1,06833 65	8,79845 58	8,76194 08	2,28235 53	94
45	1,09261 69	8,79625 54	8,76181 68	2,30663 57	95
46	1,11689 73	8,79418 47	8,76169 97	2,33091 61	96
47	1,14117 77	8,79223 57	8,76158 89	2,35519 65	97
48	1,16545 81	8,79040 07	8,76148 42	2,37947 68	98
49	1,18973 84	8,78867 25	8,76138 53	2,40375 72	99
50	1,21401 88	8,78704 46	8,76129 17	2,42803 76	100
			8,75966 78		Perpét.

5 $\frac{7}{8}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (5 $\frac{7}{8}$)	C^t log f_n (5 $\frac{7}{8}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,02479 34	0,02479 34	8,79329 68	1,26446 46	51
2	0,04958 68	9,73598 32	8,79191 28	1,28925 80	52
3	0,07438 03	9,57199 39	8,79060 96	1,31405 14	53
4	0,09917 37	9,45903 94	8,78938 24	1,33884 49	54
5	0,12396 71	9,37399 59	8,78822 64	1,36363 83	55
6	0,14876 05	9,30656 36	8,78713 74	1,38843 17	56
7	0,17355 40	9,25124 87	8,78611 13	1,41322 51	57
8	0,19834 74	9,20477 14	8,78514 44	1,43801 86	58
9	0,22314 08	9,16501 70	8,78423 30	1,46281 20	59
10	0,24793 42	9,13054 11	8,78337 41	1,48760 54	60
11	0,27272 77	9,10031 41	8,78256 43	1,51239 88	61
12	0,29752 11	9,07357 53	8,78180 09	1,53719 22	62
13	0,32231 45	9,04974 79	8,78108 10	1,56198 57	63
14	0,34710 79	9,02838 32	8,78040 22	1,58677 91	64
15	0,37190 13	9,00912 55	8,77976 21	1,61157 25	65
16	0,39669 48	8,99168 88	8,77915 82	1,63636 59	66
17	0,42148 82	8,97583 85	8,77858 88	1,66115 94	67
18	0,44628 16	8,96138 11	8,77805 15	1,68595 28	68
19	0,47107 50	8,94815 41	8,77754 48	1,71074 62	69
20	0,49586 85	8,93602 05	8,77706 67	1,73553 96	70
21	0,52066 19	8,92486 34	8,77661 55	1,76033 31	71
22	0,54545 53	8,91458 22	8,77618 98	1,78512 65	72
23	0,57024 87	8,90509 02	8,77578 81	1,80991 99	73
24	0,59504 22	8,89631 13	8,77540 91	1,83471 33	74
25	0,61983 56	8,88817 95	8,77505 15	1,85950 67	75
26	0,64462 90	8,88063 62	8,77471 40	1,88430 02	76
27	0,66942 24	8,87362 99	8,77439 53	1,90909 36	77
28	0,69421 59	8,86711 46	8,77409 45	1,93388 70	78
29	0,71900 93	8,86104 93	8,77381 08	1,95868 04	79
30	0,74380 27	8,85539 73	8,77354 29	1,98347 39	80
31	0,76859 61	8,85012 57	8,77328 99	2,00826 73	81
32	0,79338 95	8,84520 46	8,77305 13	2,03306 08	82
33	0,81818 30	8,84060 73	8,77282 59	2,05785 41	83
34	0,84297 64	8,83630 93	8,77261 31	2,08264 76	84
35	0,86776 98	8,83228 85	8,77241 23	2,10744 10	85
36	0,89256 32	8,82852 47	8,77222 27	2,13223 44	86
37	0,91735 67	8,82499 95	8,77204 36	2,15702 78	87
38	0,94215 01	8,82169 59	8,77187 47	2,18182 13	88
39	0,96694 35	8,81859 85	8,77171 51	2,20661 47	89
40	0,99173 69	8,81569 33	8,77156 43	2,23140 81	90
41	1,01653 04	8,81296 69	8,77142 22	2,25620 15	91
42	1,04132 38	8,81040 74	8,77128 79	2,28099 49	92
43	1,06611 72	8,80800 37	8,77116 11	2,30578 84	93
44	1,09091 06	8,80574 57	8,77104 12	2,33058 18	94
45	1,11570 40	8,80362 35	8,77092 81	2,35537 52	95
46	1,14049 75	8,80162 87	8,77082 14	2,38016 86	96
47	1,16529 09	8,79975 29	8,77072 06	2,40496 21	97
48	1,19008 43	8,79798 87	8,77062 54	2,42975 55	98
49	1,21487 77	8,79632 87	8,77053 55	2,45454 89	99
50	1,23967 12	8,79476 69	8,77045 05	2,47934 23	100
			8,76900 79		Perpét.

6 pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (6)	C^t log f_n (6)	log r^n	ANNÉES.
1	0,02530 59	0,02530 59	8,80098 36	1,29059 91	51
2	0,05061 17	9,73674 45	8,79965 87	1,31590 50	52
3	0,07591 76	9,57299 90	8,79841 25	1,34121 09	53
4	0,10122 35	9,46028 35	8,79723 99	1,36651 67	54
5	0,12652 93	9,37547 41	8,79613 68	1,39182 26	55
6	0,15183 52	9,30827 11	8,79509 86	1,41712 85	56
7	0,17714 11	9,25318 05	8,79412 15	1,44243 43	57
8	0,20244 69	9,20692 28	8,79320 16	1,46774 02	58
9	0,22775 28	9,16738 30	8,79233 56	1,49304 61	59
10	0,25305 87	9,13311 71	8,79152 02	1,51835 19	60
11	0,27836 45	9,10309 50	8,79075 24	1,54365 78	61
12	0,30367 04	9,07655 68	8,79002 93	1,56896 36	62
13	0,32897 62	9,05292 52	8,78934 82	1,59426 95	63
14	0,35428 21	9,03175 13	8,78870 67	1,61957 54	64
15	0,37958 80	9,01268 01	8,78810 23	1,64488 12	65
16	0,40489 38	8,99542 52	8,78753 29	1,67018 71	66
17	0,43019 97	8,97975 23	8,78699 65	1,69549 30	67
18	0,45550 56	8,96546 77	8,78649 09	1,72079 88	68
19	0,48081 14	8,95240 91	8,78601 46	1,74610 47	69
20	0,50611 73	8,94043 96	8,78556 56	1,77141 06	70
21	0,53142 32	8,92944 22	8,78514 26	1,79671 64	71
22	0,55672 90	8,91931 64	8,78474 38	1,82202 23	72
23	0,58203 49	8,90997 56	8,78436 80	1,84732 82	73
24	0,60734 08	8,90134 39	8,78401 37	1,87263 40	74
25	0,63264 66	8,89335 51	8,78367 97	1,89793 99	75
26	0,65795 25	8,88595 09	8,78336 49	1,92324 58	76
27	0,68325 84	8,87907 97	8,78306 81	1,94855 16	77
28	0,70856 42	8,87269 55	8,78278 83	1,97385 75	78
29	0,73387 01	8,86675 75	8,78252 45	1,99916 34	79
30	0,75917 60	8,86122 91	8,78227 58	2,02446 92	80
31	0,78448 18	8,85607 74	8,78204 13	2,04977 51	81
32	0,80978 77	8,85127 26	8,78182 01	2,07508 10	82
33	0,83509 36	8,84678 81	8,78161 17	2,10038 68	83
34	0,86039 94	8,84259 95	8,78141 51	2,12569 27	84
35	0,88570 53	8,83868 45	8,78122 97	2,15099 85	85
36	0,91101 11	8,83502 33	8,78105 48	2,17630 44	86
37	0,93631 70	8,83159 74	8,78088 99	2,20161 03	87
38	0,96162 29	8,82839 00	8,78073 45	2,22691 61	88
39	0,98692 87	8,82538 57	8,78058 78	2,25222 20	89
40	1,01223 46	8,82257 04	8,78044 95	2,27752 79	90
41	1,03754 05	8,81993 11	8,78031 91	2,30283 37	91
42	1,06284 63	8,81745 57	8,78019 62	2,32813 96	92
43	1,08815 22	8,81513 34	8,78008 01	2,35344 55	93
44	1,11345 81	8,81295 38	8,77997 08	2,37875 13	94
45	1,13876 39	8,81090 77	8,77986 75	2,40405 72	95
46	1,16406 98	8,80898 60	8,77977 02	2,42936 31	96
47	1,18937 57	8,80718 09	8,77967 84	2,45466 89	97
48	1,21468 15	8,80548 49	8,77959 18	2,47997 48	98
49	1,23998 74	8,80389 09	8,77951 01	2,50528 07	99
50	1,26529 33	8,80239 25	8,77943 31	2,53058 65	100
			8,77815 13		Perpét.

6 $\frac{1}{4}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (6 $\frac{1}{4}$)	C^t log f_n (6 $\frac{1}{4}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,02632 89	0,02632 89	8,81606 66	1,34277 59	51
2	0,05265 79	9,73826 39	8,81485 28	1,36910 48	52
3	0,07898 68	9,57500 48	8,81371 35	1,39543 38	53
4	0,10531 58	9,46276 53	8,81264 40	1,42176 27	54
5	0,13164 47	9,37842 19	8,81163 97	1,44809 16	55
6	0,15797 36	9,31167 48	8,81069 66	1,47442 06	56
7	0,18430 26	9,25703 02	8,80981 10	1,50074 95	57
8	0,21063 15	9,21120 86	8,80897 90	1,52707 84	58
9	0,23696 04	9,17209 49	8,80819 75	1,55340 74	59
10	0,26328 94	9,13824 52	8,80746 32	1,57973 63	60
11	0,28961 83	9,10862 97	8,80677 32	1,60606 53	61
12	0,31594 73	9,08248 81	8,80612 48	1,63239 42	62
13	0,34227 62	9,05924 36	8,80551 55	1,65872 31	63
14	0,36860 51	9,03844 73	8,80494 27	1,68505 21	64
15	0,39493 41	9,01974 43	8,80440 43	1,71138 10	65
16	0,42126 30	9,00284 80	8,80389 82	1,73771 00	66
17	0,44759 20	8,98752 47	8,80342 25	1,76403 89	67
18	0,47392 09	8,97358 03	8,80297 51	1,79036 78	68
19	0,50024 98	8,96085 31	8,80255 45	1,81669 68	69
20	0,52657 88	8,94920 58	8,80215 91	1,84302 57	70
21	0,55290 77	8,93852 19	8,80178 72	1,86935 46	71
22	0,57923 67	8,92870 11	8,80143 75	1,89568 36	72
23	0,60556 56	8,91965 64	8,80110 86	1,92201 25	73
24	0,63189 45	8,91131 26	8,80079 93	1,94834 15	74
25	0,65822 35	8,90360 33	8,80050 84	1,97467 04	75
26	0,68455 24	8,89647 05	8,80023 47	2,00099 93	76
27	0,71088 13	8,88986 25	8,79997 74	2,02732 83	77
28	0,73721 03	8,88373 38	8,79973 53	2,05365 72	78
29	0,76353 92	8,87804 36	8,79950 76	2,07998 62	79
30	0,78986 82	8,87275 53	8,79929 33	2,10631 51	80
31	0,81619 71	8,86783 63	8,79909 18	2,13264 40	81
32	0,84252 60	8,86325 70	8,79890 22	2,15897 30	82
33	0,86885 50	8,85899 07	8,79872 38	2,18530 19	83
34	0,89518 39	8,85501 33	8,79835 61	2,21163 09	84
35	0,92151 29	8,85130 29	8,79839 82	2,23795 98	85
36	0,94784 18	8,84783 92	8,79824 97	2,26428 87	86
37	0,97417 07	8,84460 46	8,79810 99	2,29061 77	87
38	1,00049 97	8,84158 20	8,79797 84	2,31694 66	88
39	1,02682 86	8,83875 63	8,79785 47	2,34327 55	89
40	1,05315 75	8,83611 35	8,79773 83	2,36960 45	90
41	1,07948 65	8,83364 09	8,79762 88	2,39593 34	91
42	1,10581 54	8,83132 63	8,79752 57	2,42226 24	92
43	1,13214 44	8,82915 93	8,79742 87	2,44859 13	93
44	1,15847 33	8,82712 95	8,79733 75	2,47492 02	94
45	1,18480 22	8,82522 77	8,79725 16	2,50124 92	95
46	1,21113 12	8,82344 54	8,79717 08	2,52757 81	96
47	1,23746 01	8,82177 45	8,79709 48	2,55390 71	97
48	1,26378 91	8,82020 77	8,79702 32	2,58023 60	98
49	1,29011 80	8,81873 84	8,79695 59	2,60656 49	99
50	1,31644 69	8,81736 00	8,79689 25	2,63289 39	100
			8,79588 00		Perpét.

6 ½ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (6 ½)	C^t log f_n (6 ½)	log r^n	ANNÉES.
1	0,02734 96	0,02734 96	8,83077 22	1,39483 00	51
2	0,05469 92	9,73977 92	8,82966 09	1,42217 96	52
3	0,08204 88	9,57700 41	8,82862 00	1,44952 92	53
4	0,10939 84	9,46523 82	8,82764 50	1,47687 88	54
5	0,13674 80	9,38135 80	8,82673 15	1,50422 84	55
6	0,16409 76	9,31506 37	8,82587 53	1,53157 80	56
7	0,19144 73	9,26086 14	8,82507 31	1,55892 76	57
8	0,21879 69	9,21547 18	8,82432 11	1,58627 73	58
9	0,24614 65	9,17677 99	8,82361 62	1,61362 69	59
10	0,27349 61	9,14334 18	8,82295 53	1,64097 65	60
11	0,30084 57	9,11412 77	8,82233 58	1,66832 61	61
12	0,32819 53	9,08837 77	8,82175 48	1,69567 57	62
13	0,35554 49	9,06551 46	8,82121 00	1,72302 53	63
14	0,38289 45	9,04509 01	8,82069 90	1,75037 49	64
15	0,41024 41	9,02674 88	8,82021 99	1,77772 45	65
16	0,43759 37	9,01020 48	8,81977 04	1,80507 41	66
17	0,46494 33	8,99522 41	8,81934 88	1,83242 37	67
18	0,49229 29	8,98161 30	8,81895 33	1,85977 33	68
19	0,51964 25	8,96920 96	8,81858 22	1,88712 29	69
20	0,54699 22	8,95787 72	8,81823 41	1,91447 25	70
21	0,57434 18	8,94749 91	8,81790 75	1,94182 22	71
22	0,60169 14	8,93797 50	8,81760 10	1,96917 18	72
23	0,62904 10	8,92921 85	8,81731 35	1,99652 14	73
24	0,65639 06	8,92115 41	8,81704 36	2,02387 10	74
25	0,68374 02	8,91371 58	8,81679 04	2,05122 06	75
26	0,71108 98	8,90684 56	8,81655 27	2,07857 02	76
27	0,73843 94	8,90049 21	8,81632 98	2,10591 98	77
28	0,76578 90	8,89460 99	8,81612 05	2,13326 94	78
29	0,79313 86	8,88915 82	8,81592 41	2,16061 90	79
30	0,82048 82	8,88410 09	8,81573 97	2,18796 86	80
31	0,84783 78	8,87940 52	8,81556 67	2,21531 82	81
32	0,87518 74	8,87504 19	8,81540 43	2,24266 78	82
33	0,90253 71	8,87098 44	8,81525 19	2,27001 74	83
34	0,92988 67	8,86720 87	8,81510 88	2,29736 71	84
35	0,95723 63	8,86369 31	8,81497 44	2,32471 67	85
36	0,98458 59	8,86041 78	8,81484 84	2,35206 63	86
37	1,01193 55	8,85736 47	8,81473 01	2,37941 59	87
38	1,03928 51	8,85451 74	8,81461 89	2,40676 55	88
39	1,06663 47	8,85186 07	8,81451 47	2,43411 51	89
40	1,09398 43	8,84938 09	8,81441 67	2,46146 47	90
41	1,12133 39	8,84706 52	8,81432 48	2,48881 43	91
42	1,14868 35	8,84490 21	8,81423 86	2,51616 39	92
43	1,17603 31	8,84288 08	8,81415 75	2,54351 35	93
44	1,20338 27	8,84099 13	8,81408 16	2,57086 31	94
45	1,23073 24	8,83922 46	8,81401 02	2,59821 27	95
46	1,25808 20	8,83757 23	8,81394 32	2,62556 23	96
47	1,28543 16	8,83602 65	8,81388 02	2,65291 20	97
48	1,31278 12	8,83458 00	8,81382 12	2,68026 16	98
49	1,34013 08	8,83322 62	8,81376 57	2,70761 12	99
50	1,36748 04	8,83195 89	8,81371 36	2,73496 08	100
			8,81291 34		Perpét.

6 $\frac{3}{4}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (6 $\frac{3}{4}$)	C^t log f_n (6 $\frac{3}{4}$)	log r^n	ANNÉES.
1	0,02836 79	0,02836 79	8,84511 27	1,44676 21	51
2	0,05673 58	9,74129 03	8,84409 58	1,47513 00	52
3	0,08510 37	9,57899 71	8,84314 55	1,50349 78	53
4	0,11347 15	9,46770 23	8,84225 70	1,53186 57	54
5	0,14183 94	9,38428 23	8,84142 64	1,56023 36	55
6	0,17020 73	9,31843 76	8,84064 98	1,58860 15	56
7	0,19857 52	9,26467 41	8,83992 35	1,61696 94	57
8	0,22694 31	9,21971 27	8,83924 43	1,64533 73	58
9	0,25531 10	9,18143 83	8,83860 89	1,67370 51	59
10	0,28367 88	9,14840 71	8,83801 46	1,70207 30	60
11	0,31204 67	9,11958 96	8,83745 86	1,73044 09	61
12	0,34041 46	9,09422 58	8,83693 84	1,75880 88	62
13	0,36878 25	9,07173 86	8,83645 16	1,78717 67	63
14	0,39715 04	9,05167 97	8,83599 62	1,81554 46	64
15	0,42551 83	9,03369 43	8,83557 00	1,84391 24	65
16	0,45388 61	9,01749 60	8,83517 10	1,87228 03	66
17	0,48225 40	9,00285 12	8,83479 77	1,90064 82	67
18	0,51062 19	8,98956 65	8,83444 82	1,92901 61	68
19	0,53898 98	8,97747 98	8,83412 11	1,95738 40	69
20	0,56735 77	8,96645 47	8,83381 49	1,98575 19	70
21	0,59572 56	8,95637 47	8,83352 83	2,01411 97	71
22	0,62409 34	8,94713 96	8,83325 99	2,04248 76	72
23	0,65246 13	8,93866 31	8,83300 87	2,07085 55	73
24	0,68082 92	8,93086 99	8,83277 36	2,09922 34	74
25	0,70919 71	8,92369 42	8,83255 33	2,12759 13	75
26	0,73756 50	8,91707 81	8,83234 70	2,15595 92	76
27	0,76593 29	8,91097 05	8,83215 40	2,18432 70	77
28	0,79430 07	8,90532 59	8,83197 32	2,21269 49	78
29	0,82266 86	8,90010 40	8,83180 40	2,24106 28	79
30	0,85103 65	8,89526 87	8,83164 55	2,26943 07	80
31	0,87940 44	8,89078 74	8,83149 70	2,29779 86	81
32	0,90777 23	8,88663 09	8,83135 80	2,32616 65	82
33	0,93614 02	8,88277 31	8,83122 78	2,35453 43	83
34	0,96450 80	8,87919 00	8,83110 58	2,38290 22	84
35	0,99287 59	8,87586 01	8,83099 17	2,41127 01	85
36	1,02124 38	8,87276 38	8,83088 48	2,43963 80	86
37	1,04961 17	8,86988 30	8,83078 47	2,46800 59	87
38	1,07797 96	8,86720 17	8,83069 09	2,49637 38	88
39	1,10634 75	8,86470 49	8,83060 30	2,52474 16	89
40	1,13471 53	8,86237 90	8,83052 08	2,55310 95	90
41	1,16308 32	8,86021 12	8,83044 37	2,58147 74	91
42	1,19145 11	8,85819 04	8,83037 15	2,60984 53	92
43	1,21981 90	8,85630 58	8,83030 39	2,63821 32	93
44	1,24818 69	8,85454 78	8,83024 06	2,66658 11	94
45	1,27655 48	8,85290 74	8,83018 13	2,69494 90	95
46	1,30492 27	8,85137 63	8,83012 57	2,72331 68	96
47	1,33329 05	8,84994 69	8,83007 37	2,75168 47	97
48	1,36165 84	8,84861 21	8,83002 50	2,78005 26	98
49	1,39002 63	8,84736 54	8,82997 94	2,80842 05	99
50	1,41839 42	8,84620 09	8,82993 66	2,83678 84	100
			8,82930 38		Perpét.

7 pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (7)	C^t log f_n (7)	log r^n	ANNÉES.
1	0,02938 38	0,02938 38	8,85910 02	1,49857 27	51
2	0,05876 76	9,74279 72	8,85817 02	1,52795 64	52
3	0,08815 13	9,58098 38	8,85730 29	1,55734 02	53
4	0,11753 51	9,47015 78	8,85649 39	1,58672 40	54
5	0,14691 89	9,38719 52	8,85573 91	1,61610 78	55
6	0,17630 27	9,32179 69	8,85503 50	1,64549 16	56
7	0,20568 64	9,26846 85	8,85437 79	1,67487 53	57
8	0,23507 02	9,22393 12	8,85376 47	1,70425 91	58
9	0,26445 40	9,18607 01	8,85319 24	1,73364 29	59
10	0,29383 78	9,15344 14	8,85265 82	1,76302 67	60
11	0,32322 16	9,12501 56	8,85215 96	1,79241 04	61
12	0,35260 53	9,10003 26	8,85169 41	1,82179 42	62
13	0,38198 91	9,07791 58	8,85125 95	1,85117 80	63
14	0,41137 29	9,05821 70	8,85085 37	1,88056 18	64
15	0,44075 67	9,04058 10	8,85047 48	1,90994 56	65
16	0,47014 04	9,02472 23	8,85012 11	1,93932 93	66
17	0,49952 42	9,01040 68	8,84979 07	1,96871 31	67
18	0,52890 80	8,99744 14	8,84948 21	1,99809 69	68
19	0,55829 18	8,98566 45	8,84919 39	2,02748 07	69
20	0,58767 56	8,97493 95	8,84892 48	2,05686 44	70
21	0,61705 93	8,96514 99	8,84867 34	2,08624 82	71
22	0,64644 31	8,95619 62	8,84843 87	2,11563 20	72
23	0,67582 69	8,94799 18	8,84821 93	2,14501 58	73
24	0,70521 07	8,94046 18	8,84801 44	2,17439 95	74
25	0,73459 44	8,93354 06	8,84782 30	2,20378 33	75
26	0,76397 82	8,92717 03	8,84764 42	2,23316 71	76
27	0,79336 20	8,92130 00	8,84747 72	2,26255 09	77
28	0,82274 58	8,91588 47	8,84732 11	2,29193 47	78
29	0,85212 96	8,91088 39	8,84717 54	2,32131 84	79
30	0,88151 33	8,90626 18	8,84703 91	2,35070 22	80
31	0,91089 71	8,90198 61	8,84691 19	2,38008 60	81
32	0,94028 09	8,89802 78	8,84679 30	2,40946 98	82
33	0,96966 47	8,89436 08	8,84668 19	2,43885 35	83
34	0,99904 84	8,89096 14	8,84657 81	2,46823 73	84
35	1,02843 22	8,88780 83	8,84648 11	2,49762 11	85
36	1,05781 60	8,88488 21	8,84639 05	2,52700 49	86
37	1,08719 98	8,88216 49	8,84630 58	2,55638 87	87
38	1,11658 36	8,87964 09	8,84622 67	2,58577 24	88
39	1,14596 73	8,87729 51	8,84615 28	2,61515 62	89
40	1,17535 11	8,87511 42	8,84608 37	2,64454 00	90
41	1,20473 49	8,87308 58	8,84601 92	2,67392 38	91
42	1,23411 87	8,87119 87	8,84595 88	2,70330 75	92
43	1,26350 24	8,86944 23	8,84590 25	2,73269 13	93
44	1,29288 62	8,86780 72	8,84584 98	2,76207 51	94
45	1,32227 00	8,86628 48	8,84580 06	2,79145 89	95
46	1,35165 38	8,86486 67	8,84575 46	2,82084 27	96
47	1,38103 76	8,86354 55	8,84571 15	2,85022 64	97
48	1,41042 13	8,86231 45	8,84567 14	2,87961 02	98
49	1,43980 51	8,86116 71	8,84563 40	2,90899 40	99
50	1,46918 89	8,86009 74	8,84559 88	2,93837 78	100
			8,84509 80		Perpét.

7 ½ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (7 ½)	C^t log f_n (7 ½)	log r^n	ANNÉES.
1	0,03140 85	0,03140 85	8,88606 25	1,60183 17	51
2	0,06281 69	9,74579 88	8,88528 58	1,63324 01	52
3	0,09422 54	9,58493 88	8,88456 46	1,66464 86	53
4	0,12563 39	9,47504 25	8,88389 48	1,69605 71	54
5	0,15704 23	9,39298 64	8,88327 27	1,72746 55	55
6	0,18845 08	9,32847 11	8,88269 47	1,75887 40	56
7	0,21985 92	9,27600 27	8,88215 78	1,79028 25	57
8	0,25126 77	9,23230 23	8,88165 89	1,82169 09	58
9	0,28267 62	9,19525 51	8,88119 53	1,85309 94	59
10	0,31408 46	9,16341 76	8,88076 46	1,88450 79	60
11	0,34549 31	9,13576 05	8,88036 42	1,91591 63	61
12	0,37690 16	9,11152 40	8,87999 21	1,94732 48	62
13	0,40831 00	9,09013 17	8,87964 63	1,97873 32	63
14	0,43971 85	9,07113 56	8,87932 48	2,01014 17	64
15	0,47112 70	9,05418 10	8,87902 60	2,04155 02	65
16	0,50253 54	9,03898 22	8,87874 82	2,07295 86	66
17	0,53394 39	9,02530 60	8,87848 99	2,10436 71	67
18	0,56535 24	9,01295 93	8,87824 99	2,13577 56	68
19	0,59676 08	9,00178 08	8,87802 66	2,16718 40	69
20	0,62816 93	8,99163 44	8,87781 91	2,19859 25	70
21	0,65957 77	8,98240 41	8,87762 62	2,23000 10	71
22	0,69098 62	8,97399 04	8,87744 67	2,26140 94	72
23	0,72239 47	8,96630 73	8,87727 98	2,29281 79	73
24	0,75380 31	8,95928 03	8,87712 47	2,32422 64	74
25	0,78521 16	8,95284 41	8,87698 04	2,35563 48	75
26	0,81662 01	8,94694 14	8,87684 62	2,38704 33	76
27	0,84802 85	8,94152 15	8,87672 15	2,41845 17	77
28	0,87943 70	8,93653 99	8,87660 54	2,44986 02	78
29	0,91084 55	8,93195 65	8,87649 75	2,48126 87	79
30	0,94225 39	8,92773 59	8,87639 71	2,51267 71	80
31	0,97366 24	8,92384 62	8,87630 38	2,54408 56	81
32	1,00507 09	8,92025 89	8,87621 70	2,57549 41	82
33	1,03647 93	8,91694 84	8,87613 63	2,60690 25	83
34	1,06788 78	8,91389 12	8,87606 12	2,63831 10	84
35	1,09929 62	8,91106 65	8,87599 13	2,66971 95	85
36	1,13070 47	8,90845 53	8,87592 64	2,70112 79	86
37	1,16211 32	8,90604 04	8,87586 60	2,73253 64	87
38	1,19352 16	8,90380 58	8,87580 98	2,76394 49	88
39	1,22493 01	8,90173 74	8,87575 75	2,79535 33	89
40	1,25633 86	8,89982 22	8,87570 89	2,82676 18	90
41	1,28774 70	8,89804 82	8,87566 37	2,85817 02	91
42	1,31915 55	8,89640 43	8,87562 17	2,88957 87	92
43	1,35056 40	8,89488 08	8,87558 25	2,92098 72	93
44	1,38197 24	8,89346 82	8,87554 62	2,95239 56	94
45	1,41338 09	8,89215 84	8,87551 23	2,98380 41	95
46	1,44478 94	8,89094 35	8,87548 08	3,01521 26	96
47	1,47619 78	8,88981 64	8,87546 16	3,04662 10	97
48	1,50760 63	8,88877 05	8,87542 43	3,07802 95	98
49	1,53901 47	8,88779 99	8,87539 89	3,10943 80	99
50	1,57042 32	8,88689 89	8,87537 54	3,14084 64	100
			8,87506 13		Perpét.

8 pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (8)	C^t log f_n (8)	log r^n	ANNÉES.
1	0,03342 38	0,03342 38	8,91174 95	1,70461 15	51
2	0,06684 75	9,74878 43	8,91110 22	1,73803 53	52
3	0,10027 13	9,58886 92	8,91050 36	1,77145 90	53
4	0,13369 50	9,47989 30	8,90995 00	1,80488 28	54
5	0,16711 88	9,39873 22	8,90943 81	1,83830 66	55
6	0,20054 25	9,33508 74	8,90896 47	1,87173 03	56
7	0,23396 63	9,28346 49	8,90852 68	1,90515 41	57
8	0,26739 00	9,24058 61	8,90812 18	1,93857 78	58
9	0,30081 38	9,20433 63	8,90774 70	1,97200 16	59
10	0,33423 76	9,17327 22	8,90740 04	2,00542 53	60
11	0,36766 13	9,14636 48	8,90707 96	2,03884 91	61
12	0,40108 51	9,12285 46	8,90678 27	2,07227 28	62
13	0,43450 88	9,10216 54	8,90650 81	2,10569 66	63
14	0,46793 26	9,08384 95	8,90625 41	2,13912 04	64
15	0,50135 63	9,06755 27	8,90601 89	2,17254 41	65
16	0,53478 01	9,05298 95	8,90580 13	2,20596 79	66
17	0,56820 38	9,03992 72	8,90559 98	2,23939 16	67
18	0,60162 76	9,02817 29	8,90541 34	2,27281 54	68
19	0,63505 14	9,01756 60	8,90524 08	2,30623 91	69
20	0,66847 51	9,00797 05	8,90508 12	2,33966 29	70
21	0,70189 89	8,99927 09	8,90493 34	2,37308 66	71
22	0,73532 26	8,99136 82	8,90479 66	2,40651 04	72
23	0,76874 64	8,98417 69	8,90466 99	2,43993 42	73
24	0,80217 01	8,97762 28	8,90455 27	2,47335 79	74
25	0,83559 39	8,97164 12	8,90444 41	2,50678 17	75
26	0,86901 76	8,96617 52	8,90434 37	2,54020 54	76
27	0,90244 14	8,96117 47	8,90425 07	2,57362 92	77
28	0,93586 52	8,95659 53	8,90416 46	2,60705 29	78
29	0,96928 89	8,95239 79	8,90408 49	2,64047 67	79
30	1,00271 27	8,94854 71	8,90401 12	2,67390 04	80
31	1,03613 64	8,94501 18	8,90394 29	2,70732 42	81
32	1,06956 02	8,94176 38	8,90387 96	2,74074 79	82
33	1,10298 39	8,93877 80	8,90382 11	2,77417 17	83
34	1,13640 77	8,93603 14	8,90376 68	2,80759 55	84
35	1,16983 14	8,93350 38	8,90371 68	2,84101 92	85
36	1,20325 52	8,93117 65	8,90367 03	2,87444 30	86
37	1,23667 90	8,92903 25	8,90362 72	2,90786 67	87
38	1,27010 27	8,92705 68	8,90358 74	2,94129 05	88
39	1,30352 65	8,92523 54	8,90355 06	2,97471 42	89
40	1,33695 02	8,92355 57	8,90351 64	3,00813 80	90
41	1,37037 40	8,92200 62	8,90348 49	3,04156 17	91
42	1,40379 77	8,92057 63	8,90345 56	3,07498 55	92
43	1,43722 15	8,91925 67	8,90342 85	3,10840 93	93
44	1,47064 52	8,91803 83	8,90340 34	3,14183 30	94
45	1,50406 90	8,91691 32	8,90338 02	3,17525 68	95
46	1,53749 28	8,91587 40	8,90335 86	3,20868 05	96
47	1,57091 65	8,91491 41	8,90333 87	3,24210 43	97
48	1,60434 03	8,91402 71	8,90332 04	3,27552 80	98
49	1,63776 40	8,91320 74	8,90330 33	3,30895 18	99
50	1,67118 78	8,91244 98	8,90328 74	3,34237 55	100
			8,90309 00		Perpét.

9 pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (9)	C^t log f_n (9)	log r^n	ANNÉES.
1	0,03742 65	0,03742 65	8,95963 42	1,90875 14	51
2	0,07485 30	9,75470 67	8,95918 65	1,94617 79	52
3	0,11227 95	9,59665 73	8,95877 61	1,98360 44	53
4	0,14970 60	9,48949 26	8,95840 00	2,02103 09	54
5	0,18713 25	9,41008 93	8,95805 52	2,05845 74	55
6	0,22455 90	9,34814 86	8,95773 91	2,09588 39	56
7	0,26198 55	9,29817 72	8,95744 93	2,13331 04	57
8	0,29941 20	9,25689 66	8,95718 36	2,17073 69	58
9	0,33683 85	9,22219 29	8,95694 01	2,20816 34	59
10	0,37426 50	9,19262 35	8,95671 67	2,24558 99	60
11	0,41169 15	9,16715 98	8,95651 19	2,28301 64	61
12	0,44911 80	9,14504 29	8,95632 40	2,32044 29	62
13	0,48654 45	9,12569 77	8,95615 18	2,35786 94	63
14	0,52397 10	9,10867 72	8,95599 38	2,39529 59	64
15	0,56139 75	9,09362 78	8,95584 89	2,43272 24	65
16	0,59882 40	9,08026 53	8,95571 61	2,47014 89	66
17	0,63625 05	9,06835 74	8,95559 43	2,50757 54	67
18	0,67367 70	9,05771 28	8,95548 24	2,54500 19	68
19	0,71110 35	9,04817 14	8,95537 99	2,58242 84	69
20	0,74853 00	9,03959 84	8,95528 59	2,61985 49	70
21	0,78595 65	9,03187 94	8,95519 96	2,65728 14	71
22	0,82338 30	9,02491 64	8,95512 06	2,69470 79	72
23	0,86080 95	9,01862 51	8,95504 80	2,73213 43	73
24	0,89823 60	9,01293 22	8,95498 14	2,76956 08	74
25	0,93566 24	9,00777 44	8,95492 04	2,80698 73	75
26	0,97308 89	9,00319 57	8,95486 44	2,84441 38	76
27	1,01051 54	8,99884 72	8,95481 29	2,88184 03	77
28	1,04794 19	8,99498 57	8,95476 59	2,91926 68	78
29	1,08536 84	8,99147 30	8,95472 26	2,95669 33	79
30	1,12279 49	8,98827 51	8,95468 29	2,99411 98	80
31	1,16022 14	8,98536 18	8,95464 65	3,03154 63	81
32	1,19764 79	8,98270 62	8,95461 32	3,06897 28	82
33	1,23507 44	8,98028 40	8,95458 26	3,10639 93	83
34	1,27250 09	8,97807 36	8,95455 45	3,14382 58	84
35	1,30992 74	8,97605 57	8,95452 87	3,18125 23	85
36	1,34735 39	8,97421 25	8,95450 50	3,21867 88	86
37	1,38478 04	8,97252 83	8,95448 34	3,25610 53	87
38	1,42220 69	8,97098 90	8,95446 35	3,29353 18	88
39	1,45963 34	8,96958 15	8,95444 52	3,33095 83	89
40	1,49705 99	8,96829 43	8,95442 85	3,36838 48	90
41	1,53448 64	8,96711 67	8,95441 31	3,40581 13	91
42	1,57191 29	8,96603 91	8,95439 91	3,44323 78	92
43	1,60933 94	8,96505 28	8,95438 61	3,48066 43	93
44	1,64676 59	8,96415 00	8,95437 42	3,51809 08	94
45	1,68419 24	8,96332 33	8,95436 34	3,55551 73	95
46	1,72161 89	8,96256 63	8,95435 34	3,59294 38	96
47	1,75904 54	8,96187 29	8,95434 43	3,63037 03	97
48	1,79647 19	8,96123 78	8,95433 58	3,66779 68	98
49	1,83389 84	8,96065 59	8,95432 81	3,70522 33	99
50	1,87132 49	8,96012 28	8,95432 11	3,74264 98	100
			8,95424 25		Perpét.

10 pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C' log f_n (10)	C' log f_n (10)	log r^n	ANNÉES.
1	0,04139 27	0,04139 27	9,00337 63	2,11102 69	51
2	0,08278 54	9,76056 60	9,00306 83	2,15241 96	52
3	0,12417 81	9,60435 01	9,00278 85	2,19381 23	53
4	0,16557 07	9,49895 92	9,00253 42	2,23520 50	54
5	0,20696 34	9,42127 07	9,00230 32	2,27659 77	55
6	0,24835 61	9,36098 59	9,00209 33	2,31799 04	56
7	0,28974 88	9,31261 21	9,00190 26	2,35938 31	57
8	0,33114 15	9,27287 16	9,00172 93	2,40077 57	58
9	0,37253 42	9,23965 11	9,00157 18	2,44216 84	59
10	0,41392 69	9,21150 87	9,00142 87	2,48356 11	60
11	0,45531 95	9,18741 68	9,00129 86	2,52495 38	61
12	0,49671 22	9,16661 75	9,00118 04	2,56634 65	62
13	0,53810 49	9,14853 64	9,00107 30	2,60773 92	63
14	0,57949 76	9,13272 77	9,00097 53	2,64913 19	64
15	0,62089 03	9,11883 91	9,00088 65	2,69052 45	65
16	0,66228 30	9,10658 73	9,00080 59	2,73191 72	66
17	0,70367 57	9,09574 15	9,00073 26	2,77330 99	67
18	0,74506 83	9,08611 14	9,00066 59	2,81470 26	68
19	0,78646 10	9,07753 82	9,00060 53	2,85609 53	69
20	0,82785 37	9,06988 86	9,00055 03	2,89748 80	70
21	0,86924 64	9,06304 95	9,00050 03	2,93888 06	71
22	0,91063 91	9,05692 41	9,00045 47	2,98027 33	72
23	0,95203 18	9,05142 97	9,00041 34	3,02166 60	73
24	0,99342 44	9,04649 44	9,00037 57	3,06305 87	74
25	1,03481 71	9,04205 57	9,00034 16	3,10445 14	75
26	1,07620 98	9,03805 97	9,00031 05	3,14584 41	76
27	1,11760 25	9,03445 86	9,00028 23	3,18723 68	77
28	1,15899 52	9,03121 05	9,00025 66	3,22862 94	78
29	1,20038 79	9,02827 87	9,00023 33	3,27002 21	79
30	1,24178 06	9,02563 04	9,00021 21	3,31141 48	80
31	1,28317 32	9,02323 69	9,00019 28	3,35280 75	81
32	1,32456 59	9,02007 23	9,00017 53	3,39420 02	82
33	1,36595 86	9,01911 38	9,00015 93	3,43559 29	83
34	1,40735 13	9,01734 10	9,00014 48	3,47698 56	84
35	1,44874 40	9,01573 56	9,00013 17	3,51837 82	85
36	1,49013 67	9,01428 13	9,00011 97	3,55977 09	86
37	1,53152 94	9,01296 35	9,00010 88	3,60116 36	87
38	1,57292 20	9,01176 88	9,00009 89	3,64255 63	88
39	1,61431 47	9,01068 57	9,00009 00	3,68394 90	89
40	1,65570 74	9,00970 32	9,00008 17	3,72534 17	90
41	1,69710 01	9,00881 21	9,00007 43	3,76673 43	91
42	1,73849 28	9,00800 36	9,00006 76	3,80812 70	92
43	1,77988 55	9,00726 99	9,00006 14	3,84951 97	93
44	1,82127 81	9,00660 40	9,00005 58	3,89091 24	94
45	1,86267 08	9,00599 94	9,00005 08	3,93230 51	95
46	1,90406 35	9,00545 06	9,00004 61	3,97369 78	96
47	1,94545 62	9,00495 22	9,00004 19	4,01509 05	97
48	1,98684 89	9,00449 97	9,00003 81	4,05648 31	98
49	2,02824 16	9,00408 87	9,00003 47	4,09787 58	99
50	2,06963 43	9,00371 54	9,00003 15	4,13926 85	100
			9,00000 00		Perpét.

12 pour 100.

ANNÉES.	log r^n	C^t log f_n (12)	C^t log f_n (12)	log r^n	ANNÉES.
1	0,04921 80	0,04921 80	9,08052 50	2,51011 92	51
2	0,09843 60	9,77210 02	9,08038 09	2,55933 72	52
3	0,14765 41	9,61945 76	9,08025 22	2,60855 52	53
4	0,19687 21	9,51750 53	9,08013 73	2,65777 32	54
5	0,24609 01	9,44312 17	9,08003 48	2,70699 12	55
6	0,29530 81	9,38600 95	9,07994 32	2,75620 93	56
7	0,34452 62	9,34067 76	9,07986 15	2,80542 73	57
8	0,39374 42	9,30384 99	9,07978 86	2,85464 53	58
9	0,44296 22	9,27341 55	9,07972 35	2,90386 33	59
10	0,49218 02	9,24793 44	9,07966 53	2,95308 14	60
11	0,54139 82	9,22638 18	9,07961 35	3,00229 94	61
12	0,59061 63	9,20800 26	9,07956 71	3,05151 74	62
13	0,63983 43	9,19222 50	9,07952 59	3,10073 54	63
14	0,68905 23	9,17860 65	9,07948 88	3,14995 35	64
15	0,73827 03	9,16679 78	9,07945 59	3,19917 15	65
16	0,78748 84	9,15651 89	9,07942 64	3,24838 95	66
17	0,83670 64	9,14754 25	9,07940 02	3,29760 75	67
18	0,88592 44	9,13968 18	9,07937 67	3,34682 55	68
19	0,93514 24	9,13278 15	9,07935 58	3,39604 36	69
20	0,98436 05	9,12671 17	9,07933 71	3,44526 16	70
21	1,03357 85	9,12136 31	9,07932 04	3,49447 96	71
22	1,08279 65	9,11664 26	9,07930 55	3,54369 76	72
23	1,13201 45	9,11247 08	9,07929 31	3,59291 57	73
24	1,18123 25	9,10877 96	9,07928 03	3,64213 37	74
25	1,23045 06	9,10551 01	9,07926 97	3,69135 17	75
26	1,27966 86	9,10261 16	9,07925 96	3,74056 97	76
27	1,32888 66	9,10003 99	9,07925 17	3,78978 77	77
28	1,37810 46	9,09775 65	9,07924 42	3,83900 58	78
29	1,42732 27	9,09572 78	9,07923 75	3,88822 38	79
30	1,47654 07	9,09392 45	9,07923 14	3,93744 18	80
31	1,52575 87	9,09232 07	9,07922 60	3,98665 98	81
32	1,57497 67	9,09089 38	9,07922 12	4,03587 79	82
33	1,62419 47	9,08962 46	9,07921 70	4,08509 59	83
34	1,67341 28	9,08849 27	9,07921 31	4,13431 39	84
35	1,72263 08	9,08748 55	9,07920 97	4,18353 19	85
36	1,77184 88	9,08658 81	9,07920 67	4,23274 99	86
37	1,82106 68	9,08578 84	9,07920 39	4,28196 80	87
38	1,87028 49	9,08507 57	9,07920 15	4,33118 60	88
39	1,91950 29	9,08444 03	9,07919 93	4,38040 40	89
40	1,96872 09	9,08387 38	9,07919 74	4,42962 20	90
41	2,01793 89	9,08336 86	9,07919 57	4,47884 01	91
42	2,06715 70	9,08291 80	9,07919 41	4,52805 81	92
43	2,11637 50	9,08251 61	9,07919 27	4,57727 61	93
44	2,16559 30	9,08215 76	9,07919 15	4,62649 41	94
45	2,21481 10	9,08183 77	9,07919 04	4,67571 22	95
46	2,26402 90	9,08155 23	9,07918 94	4,72493 02	96
47	2,31324 71	9,08129 76	9,07918 86	4,77414 82	97
48	2,36246 51	9,08107 04	9,07918 78	4,82336 62	98
49	2,41168 31	9,08086 76	9,07918 71	4,87258 42	99
50	2,46090 11	9,08068 66	9,07918 65	4,92180 23	100
			9,07918 12		Perpét.

2 pour 100.

ANNÉES.	log r^n	log a	log a	log r^n	ANNÉES.
101	0,86861 73	8,36417 78	8,32343 33	1,29862 59	151
102	0,87721 75	8,36284 71	8,32298 27	1,30722 61	152
103	0,88581 77	8,36154 65	8,32254 14	1,31582 63	153
104	0,89441 79	8,36027 51	8,32210 92	1,32442 65	154
105	0,90301 80	8,35903 22	8,32168 59	1,33302 66	155
106	0,91161 82	8,35781 72	8,32127 13	1,34162 68	156
107	0,92021 84	8,35662 93	8,32086 52	1,35022 70	157
108	0,92881 86	8,35546 77	8,32046 75	1,35882 71	158
109	0,93741 87	8,35433 21	8,32007 78	1.36742 73	159
110	0,94601 89	8,35322 15	8,31969 62	1,37602 75	160
111	0,95461 91	8,35213 55	8,31632 24	1,38462 77	161
112	0,96321 92	8,35107 34	8,31895 62	1,39322 78	162
113	0,97181 94	8,35003 46	8,31859 75	1,40182 80	163
114	0,98041 96	8,34901 86	8,31824 61	1,41042 82	164
115	0,98901 98	8,34802 48	8,31790 19	1,41902 83	165
116	0,99761 99	8,34705 28	8,31756 47	1,42762 85	166
117	1,00622 01	8,34610 18	8,31723 44	1,43622 87	167
118	1,01482 03	8,34517 16	8,31691 08	1,44382 89	168
119	1,02342 04	8,34426 15	8,31659 37	1,45342 90	169
120	1,03202 06	8,34337 11	8,31628 31	1,46202 92	170
121	1,04062 08	8,34250 00	8,31597 89	1,47062 94	171
122	1,04922 10	8,34164 76	8,31568 07	1,47922 95	172
123	1,05782 11	8,34081 35	8,31538 87	1,48782 97	173
124	1,06642 13	8,33999 74	8,31510 25	1,49642 99	174
125	1,07502 15	8,33919 87	8,31482 22	1,50503 01	175
126	1,08362 16	8,33841 71	8,31454 75	1,51363 02	176
127	1,09222 18	8,33765 23	8,31427 83	1,52223 04	177
128	1,10082 20	8,33690 36	8,31401 46	1,53083 06	178
129	1,10942 22	8,33617 10	8,31375 63	1,53943 07	179
130	1,11802 23	8,33545 39	8,31350 31	1,54803 09	180
131	1,12662 25	8,33475 20	8,31325 51	1,55663 11	181
132	1,13522 27	8,33406 50	8,31301 20	1,56523 13	182
133	1,14382 28	8,33339 25	8,31277 39	1,57383 14	183
134	1,15242 30	8,33273 42	8,31254 05	1,58243 16	184
135	1,16102 32	8,33208 98	8,31281 19	1,59103 18	185
136	1,16962 34	8,33145 89	8,31208 78	1,59963 19	186
137	1,17822 35	8,33084 13	8,31186 83	1,60823 21	187
138	1,18682 37	8,33023 67	8,31165 31	1,61683 23	188
139	1,19542 39	8,32964 47	8,31144 23	1,62543 25	189
140	1,20402 40	8,32906 51	8,31123 57	1,63403 26	190
141	1,21262 42	8,32849 77	8,31103 33	1,64263 28	191
142	1,22122 44	8,32794 20	8,31083 49	1,65123 30	192
143	1,22982 46	8,32739 80	8,31064 05	1,65983 32	193
144	1,23842 47	8,32686 53	8,31045 00	1,66843 33	194
145	1,24702 49	8,32634 36	8,31026 34	1,67703 35	195
146	1,25562 51	8,32583 28	8,31008 04	1,68563 37	196
147	1,26422 52	8,32533 26	8,30990 11	1,69423 38	197
148	1,27282 54	8,32484 28	8,30972 54	1,70283 40	198
149	1,28142 56	8.32436 31	8,30955 32	1,71143 42	199
150	1,29002 58	8,32389 33	4,30938 45	1,72003 44	200

2 $\frac{1}{4}$ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	log a	log a	log r^n	ANNÉES.
101	0,97599 50	8,40069 10	8,36753 86	1,45916 08	151
102	0,98565 83	8,39936 32	8,36719 47	1,46882 41	152
103	0,99532 16	8,39846 30	8,36685 87	1,47848 75	153
104	1,00498 49	8,39738 97	8,36653 04	1,48815 08	154
105	1,01464 83	8,39634 25	8,36620 95	1,49781 41	155
106	1,02431 16	8,39532 09	8,36589 59	1,50747 74	156
107	1,03397 49	8,39432 40	8,36558 95	1,51714 07	157
108	1,04363 82	8,39335 13	8,36528 99	1,52680 40	158
109	1,05330 15	8,39240 21	8,36499 72	1,53646 74	159
110	1,06296 48	8,39147 58	8,36471 11	1,54613 07	160
111	1,07262 82	8,39057 18	8,36443 15	1,55579 40	161
112	1,08229 15	8,38968 94	8,36415 82	1,56545 73	162
113	1,09195 48	8,38882 83	8,36389 11	1,57512 06	163
114	1,10161 81	8,38798 77	8,36363 00	1,58478 39	164
115	1,11128 14	8,38716 72	8,36337 49	1,59444 73	165
116	1,12094 47	8,38636 62	8,36312 55	1,60411 06	166
117	1,13060 81	8,38558 43	8,36288 17	1,61377 39	167
118	1,14027 14	8,38482 10	8,36264 34	1,62343 72	168
119	1,14993 47	8,38407 58	8,36241 05	1,63310 05	169
120	1,15959 80	8,38334 81	8,36218 28	1,64276 38	170
121	1,16926 13	8,38263 77	8,36196 02	1,65242 72	171
122	1,17892 46	8,38194 41	8,36174 27	1,66209 05	172
123	1,18858 80	8,38126 67	8,36153 00	1,67175 38	173
124	1,19825 13	8,38060 53	8,36132 22	1,68141 71	174
125	1,20791 46	8,37995 95	8,36111 90	1,69108 04	175
126	1,21757 79	8,37932 87	8,36092 03	1,70074 37	176
127	1,22724 12	8,37871 27	8,36072 61	1,71040 71	177
128	1,23690 45	8,37811 12	8,36053 63	1,72007 04	178
129	1,24656 79	8,37752 36	8,36035 08	1,72973 37	179
130	1,25623 12	8,37694 98	8,36016 94	1,73939 70	180
131	1,26589 45	8,37638 93	8,35999 20	1,74906 03	181
132	1,27555 78	8,37584 19	8,35981 87	1,75872 36	182
133	1,28522 11	8,37530 71	8,35964 92	1,76838 70	183
134	1,29488 44	8,37478 48	8,35948 35	1,77805 03	184
135	1,30454 78	8,37427 46	8,35932 15	1,78771 36	185
136	1,31421 11	8,37377 61	8,35916 31	1,79737 69	186
137	1,32387 44	8,37328 92	8,35900 83	1,80704 02	187
138	1,33353 77	8,37281 36	8,35885 69	1,81670 35	188
139	1,34320 10	8,37234 89	8,35870 90	1,82636 69	189
140	1,35286 43	8,37189 49	8,35856 43	1,83603 02	190
141	1,36252 77	8,37145 14	8,35842 28	1,84569 35	191
142	1,37219 10	8,37101 80	8,35828 46	1,85535 68	192
143	1,38185 43	8,37059 46	8,35814 94	1,86502 01	193
144	1,39151 76	8,37018 10	8,35801 72	1,87468 34	194
145	1,40118 09	8,36977 68	8,35788 79	1,88434 68	195
146	1,41084 42	8,36938 18	8,35776 16	1,89401 01	196
147	1,42050 76	8,36899 60	8,35763 80	1,90367 34	197
148	1,43017 09	8,36861 89	8,35751 73	1,91333 67	198
149	1,43983 42	8,36825 04	8,35739 92	1,92300 00	199
150	1,44949 75	8,36789 04	8,35728 37	1,93266 33	200

2 ½ pour 100.

ANNÉES.	log r^n	log a	log a	log r^n	ANNÉES.
101	1,08311 04	8,43537 31	8,40850 21	1,61930 37	151
102	1,09383 43	8,43442 06	8,40824 14	1,63002 75	152
103	1,00455 81	8,43349 34	8,40798 72	1,64075 14	153
104	1,11528 20	8,43259 07	8,40773 94	1,65147 53	154
105	1,12600 59	8,43171 19	8,40749 77	1,66219 91	155
106	1,13672 97	8,43085 61	8,40726 21	1,67292 30	156
107	1,14745 36	8,43002 29	8,40703 23	1,68364 69	157
108	1,15817 75	8,42921 15	8,40680 83	1,69437 07	158
109	1,16890 13	8,42842 14	8,40659 98	1,70509 46	159
110	1,17962 52	8,42765 14	8,40637 68	1,71581 85	160
111	1,19034 91	8,42690 25	8,40616 91	1,72654 23	161
112	1,20107 29	8,42617 26	8,40596 65	1,73726 62	162
113	1,21179 68	8,42546 17	8,40576 89	1,74799 01	163
114	1,22252 07	8,42476 93	8,40557 63	1,75871 39	164
115	1,23324 45	8,42409 48	8,40538 84	1,76943 78	165
116	1,24396 84	8,42343 78	8,40520 52	1,78016 17	166
117	1,25469 23	8,42279 77	8,40502 66	1,79088 55	167
118	1,26541 61	8,42217 42	8,40485 24	1,80160 94	168
119	1,27614 00	8,42156 68	8,40468 25	1,81233 33	169
120	1,28886 38	8,42097 49	8,40451 68	1,82305 71	170
121	1,29758 77	8,42039 83	8,40435 52	1,83378 10	171
122	1,30831 16	8,41983 65	8,40419 75	1,84450 48	172
123	1,31903 54	8,41928 91	8,40404 39	1,85522 87	173
124	1,32975 93	8,41875 57	8,40389 39	1,86595 26	174
125	1,34048 32	8,41823 60	8,40374 78	1,87667 64	175
126	1,35120 70	8,41772 95	8,40360 51	1,88740 03	176
127	1,36193 09	8,41723 60	8,40346 61	1,89812 42	177
128	1,37265 48	8,41675 50	8,40333 05	1,90884 80	178
129	1,38337 86	8,41628 62	8,40319 82	1,91957 19	179
130	1,39410 25	8,41582 94	8,40306 92	1,93029 58	180
131	1,40482 64	8,41538 42	8,40294 34	1,94101 96	181
132	1,41555 02	8,41495 03	8,40282 07	1,95174 35	182
133	1,42627 41	8,41452 73	8,40270 10	1,96246 74	183
134	1,43699 80	8,41411 51	8,40258 42	1,97319 12	184
135	1,44772 18	8,41371 34	8,40247 03	1,98391 51	185
136	1,45844 57	8,41332 18	8,40235 93	1,99463 90	186
137	1,46916 96	8,41294 01	8,40225 10	2,00536 28	187
138	1,47989 34	8,41256 80	8,40214 53	2,01608 67	188
139	1,49061 73	8,41220 52	8,40204 23	2,02681 06	189
140	1,50134 12	8,41185 17	8,40194 18	2,03753 44	190
141	1,51206 50	8,41150 70	8,40184 37	2,04825 83	191
142	1,52278 89	8,41117 10	8,40174 80	2,05898 22	192
143	1,53351 28	8,41084 35	8,40165 48	2,06970 60	193
144	1,54423 66	8,41052 42	8,40156 38	2,08043 99	194
145	1,55496 05	8,41021 29	8,40147 51	2,09115 38	195
146	1,56568 43	8,40990 94	8,40138 85	2,10187 76	196
147	1,57640 82	8,40961 35	8,40130 41	2,11260 15	197
148	1,58713 21	8,40932 50	8,40122 16	2,12332 53	198
149	1,59785 59	8,40904 37	8,40114 14	2,13404 92	199
150	1,60857 98	8,40876 95	8,40106 30	2,14477 31	200

3 pour 100.

ANNÉES.	log r^n	log a	log a	log r^n	ANNÉES.
101	1,29655 97	8,49963 42	8,48215 48	1,93842 09	151
102	1,30939 69	8,49896 17	8,48200 74	1,95125 82	152
103	1,32223 41	8,49830 98	8,48186 43	1,96409 54	153
104	1,33507 14	8,49767 78	8,48172 54	1,97693 26	154
105	1,34790 86	8,49706 51	8,48159 06	1,98976 98	155
106	1,36074 58	8,49647 11	8,48145 98	2,00260 71	156
107	1,37358 30	8,49589 52	8,48133 28	2,01544 43	157
108	1,38642 03	8,49533 67	8,48120 96	2,02828 15	158
109	1,39925 75	8,49479 52	8,48109 00	2,04111 87	159
110	1,41209 47	8,49427 01	8,44097 38	2,05395 60	160
111	1,42493 19	8,49376 10	8,48086 11	2,06679 32	161
112	1,43776 92	8,49326 72	8,48075 18	2,07963 04	162
113	1,45060 64	8,49278 83	8,48064 56	2,09246 76	163
114	1,46344 36	8,49232 39	8,48054 25	2,10530 49	164
115	1,47628 08	8,49187 35	8,48044 25	2,11814 21	165
116	1,48911 81	8,49143 67	8,48034 54	2,13097 93	166
117	1,50195 53	8,49101 30	8,48025 12	2,14381 65	167
118	1,51479 25	8,49160 20	8,48015 97	2,15665 37	168
119	1,52762 97	8,49020 34	8,48007 09	2,16949 10	169
120	1,54046 70	8,48981 67	8,47998 47	2,18232 82	170
121	1,55330 42	8,48944 17	8,47990 10	2,19516 54	171
122	1,56614 14	8,48907 78	8,47981 98	2,20800 26	172
123	1,57897 86	8,48872 49	8,47974 10	2,22083 99	173
124	1,59181 59	8,48838 25	8,47966 44	2,23367 71	174
125	1,60465 31	8,48805 04	8,47959 02	2,24651 43	175
126	1,61749 63	8,48772 80	8,47951 80	2,25935 15	176
127	1,63032 75	8,48741 55	8,47944 81	2,27218 88	177
128	1,64316 48	8,48711 22	8,47938 01	2,28502 60	178
129	1,65600 20	8,48681 79	8,47931 41	2,29786 32	179
130	1,66883 92	8,48653 24	8,47925 01	2,31070 04	180
131	1,68167 64	8,48625 54	8,47918 80	2,32353 77	181
132	1,69451 37	8,48598 66	8,47912 76	2,33637 49	182
133	1,70735 09	8,48572 58	8,47906 91	2,34921 21	183
134	1,72018 81	8,48547 28	8,47901 22	2,36204 93	184
135	1,73302 53	8,48522 72	8,47895 70	2,37488 66	185
136	1,74586 26	8,48498 90	8,47890 34	2,38772 38	186
137	1,75869 98	8,48475 78	8,47885 14	2,40086 10	187
138	1,77153 70	8,48453 35	8,47880 09	2,41339 82	188
139	1,78437 42	8,48431 58	8,47875 19	2,42623 55	189
140	1,79721 15	8,48410 45	8,47870 43	2,43907 27	190
141	1,81004 87	8,48389 96	8,47865 81	2,45190 99	191
142	1,82288 59	8,48370 06	8,47861 33	2,46474 71	192
143	1,83572 31	8,48350 76	8,47856 98	2,47758 44	193
144	1,84856 04	8,48332 02	8,47852 75	2,49042 16	194
145	1,86139 76	8,48313 84	8,47848 65	2,50325 88	195
146	1,87423 48	8,48296 20	8,47844 67	2,51609 60	196
147	1,88707 20	8,48279 07	8,47840 80	2,52893 33	197
148	1,89990 93	8,48262 46	8,47837 05	2,54177 05	198
149	1,91274 65	8,48246 33	8,47833 40	2,55460 77	199
150	1,92558 37	8,48239 68	8,47829 87	2,56744 49	200

TABLE II

CONTENANT LES LOGARITHMES DE $(1 + t)^{\frac{n}{12}}$

Cette Table contient, pour les taux indiqués dans les colonnes verticales extrêmes et pour les valeurs consécutives de n comprises entre 1 et 12 inclusivement, les logarithmes de $(1 + t)^{\frac{n}{12}}$, c'est-à-dire de la valeur acquise par 1 franc placé à intérêt composé au taux t pendant n douzièmes de l'unité de temps.

TAUX pour 100	1 MOIS	2 MOIS	3 MOIS	4 MOIS	TAUX pour 100
1/8	0,00018 05	0,00036 10	0,00054 15	0,00072 20	1/8
1	0,00036 01	0,00072 02	0,00108 03	0,00144 05	1
1 1/8	0,00053 88	0,00107 77	0,00161 65	0,00215 53	1 1/8
1 3/8	0,00058 34	0,00116 68	0,00175 01	0,00233 35	1 3/8
1 1/4	0,00062 79	0,00125 57	0,00188 36	0,00251 15	1 1/4
1 7/8	0,00067 23	0,00134 46	0,00201 69	0,00268 92	1 7/8
2	0,00071 67	0,00143 34	0,00215 00	0,00286 67	2
2 1/8	0,00076 10	0,00152 20	0,00228 30	0,00304 40	2 1/8
2 1/4	0,00080 53	0,00161 06	0,00241 58	0,00322 11	2 1/4
2 3/8	0,00084 95	0,00169 90	0,00254 85	0,00339 80	2 3/8
2 1/2	0,00089 37	0,00178 73	0,00268 10	0,00357 46	2 1/2
2 5/8	0,00093 78	0,00187 55	0,00281 33	0,00375 11	2 5/8
2 3/4	0,00098 18	0,00196 36	0,00294 55	0,00392 73	2 3/4
2 7/8	0,00102 58	0,00205 16	0,00307 75	0,00410 33	2 7/8
3	0,00106 98	0,00213 95	0,00320 93	0,00427 91	3
3 1/8	0,00111 37	0,00222 73	0,00334 10	0,00445 47	3 1/8
3 1/4	0,00115 75	0,00231 50	0,00347 25	0,00463 00	3 1/4
3 3/8	0,00120 13	0,00240 26	0,00360 39	0,00480 52	3 3/8
3 1/2	0,00124 50	0,00249 01	0,00373 51	0,00498 01	3 1/2
3 5/8	0,00128 87	0,00257 74	0,00386 61	0,00515 48	3 5/8
3 3/4	0,00133 23	0,00266 47	0,00399 70	0,00532 94	3 3/4
3 7/8	0,00137 59	0,00275 18	0,00412 78	0,00550 37	3 7/8
4	0,00141 94	0,00283 89	0,00425 83	0,00567 78	4
4 1/8	0,00146 29	0,00292 58	0,00438 88	0,00585 17	4 1/8
4 1/4	0,00150 63	0,00301 27	0,00451 90	0,00602 54	4 1/4
4 3/8	0,00154 97	0,00309 91	0,00464 91	0,00619 88	4 3/8
4 1/2	0,00159 30	0,00318 60	0,00477 91	0,00637 21	4 1/2
4 5/8	0,00163 63	0,00327 26	0,00490 89	0,00654 52	4 5/8
4 3/4	0,00167 95	0,00335 90	0,00503 85	0,00671 80	4 3/4
4 7/8	0,00172 27	0,00344 53	0,00516 80	0,00689 07	4 7/8
5	0,00176 58	0,00353 15	0,00529 73	0,00706 31	5
5 1/8	0,00180 88	0,00361 77	0,00542 65	0,00723 53	5 1/8
5 1/4	0,00185 18	0,00370 37	0,00555 55	0,00740 74	5 1/4
5 3/8	0,00189 48	0,00378 96	0,00568 44	0,00757 92	5 3/8
5 1/2	0,00193 77	0,00387 54	0,00581 31	0,00775 08	5 1/2
5 5/8	0,00198 06	0,00396 11	0,00594 17	0,00792 22	5 5/8
5 3/4	0,00202 34	0,00404 67	0,00607 01	0,00809 35	5 3/4
5 7/8	0,00206 61	0,00413 22	0,00619 84	0,00826 45	5 7/8
6	0,00210 88	0,00421 76	0,00632 65	0,00843 53	6
6 1/8	0,00219 41	0,00438 82	0,00658 22	0,00877 63	6 1/4
6 1/2	0,00227 91	0,00455 83	0,00683 74	0,00911 65	6 1/2
6 3/4	0,00236 40	0,00472 80	0,00709 20	0,00945 60	6 3/4
7	0,00244 86	0,00489 73	0,00734 59	0,00979 46	7
7 1/2	0,00261 74	0,00523 47	0,00785 21	0,01046 95	7 1/2
8	0,00278 53	0,00557 06	0,00835 59	0,01114 12	8
9	0,00311 89	0,00623 77	0,00935 66	0,01247 55	9
10	0,00344 94	0,00689 88	0,01034 82	0,01379 76	10
12	0,00410 15	0,00820 30	0,01230 45	0,01640 60	12

TAUX pour 100	5 MOIS	6 MOIS	7 MOIS	8 MOIS	TAUX pour 100
1/8	0,00090 25	0,00108 30	0,00126 35	0,00144 40	1/8
1	0,00180 06	0,00216 07	0,00252 08	0,00288 09	1
1 1/8	0,00269 42	0,00323 30	0,00377 19	0,00431 07	1 1/8
1 1/4	0,00291 69	0,00350 03	0,00408 37	0,00466 70	1 1/4
1 3/8	0,00313 93	0,00376 72	0,00439 51	0,00502 29	1 3/8
1 1/2	0,00336 15	0,00403 38	0,00470 61	0,00537 84	1 1/2
2	0,00358 34	0,00430 01	0,00501 68	0,00573 34	2
2 1/8	0,00380 50	0,00456 60	0,00532 70	0,00608 80	2 1/8
2 1/4	0,00402 64	0,00483 17	0,00563 69	0,00644 22	2 1/4
2 3/8	0,00424 75	0,00509 70	0,00594 65	0,00679 59	2 3/8
2 1/2	0,00446 83	0,00536 19	0,00625 56	0,00714 92	2 1/2
2 5/8	0,00468 88	0,00562 66	0,00656 43	0,00750 21	2 5/8
2 3/4	0,00490 91	0,00589 09	0,00687 27	0,00785 46	2 3/4
2 7/8	0,00512 91	0,00615 49	0,00718 07	0,00820 66	2 7/8
3	0,00534 88	0,00641 86	0,00748 84	0,00855 82	3
3 1/8	0,00556 83	0,00668 20	0,00779 56	0,00890 93	3 1/8
3 1/4	0,00578 75	0,00694 50	0,00810 25	0,00926 00	3 1/4
3 3/8	0,00600 65	0,00720 78	0,00840 91	0,00961 03	3 3/8
3 1/2	0,00622 51	0,00747 02	0,00871 52	0,00996 02	3 1/2
3 5/8	0,00644 36	0,00773 23	0,00902 10	0,01030 97	3 5/8
3 3/4	0,00666 17	0,00799 41	0,00932 64	0,01065 87	3 3/4
3 7/8	0,00687 96	0,00825 55	0,00963 14	0,01100 74	3 7/8
4	0,00709 72	0,00851 67	0,00993 61	0,01135 56	4
4 1/8	0,00731 46	0,00877 75	0,01024 04	0,01170 33	4 1/8
4 1/4	0,00753 17	0,00903 80	0,01054 44	0,01205 07	4 1/4
4 3/8	0,00774 85	0,00929 82	0,01084 80	0,01239 77	4 3/8
4 1/2	0,00796 51	0,00955 81	0,01115 12	0,01274 42	4 1/2
4 5/8	0,00818 14	0,00981 77	0,01145 40	0,01309 03	4 5/8
4 3/4	0,00839 75	0,01007 70	0,01175 65	0,01343 60	4 3/4
4 7/8	0,00861 33	0,01033 60	0,01205 87	0,01378 13	4 7/8
5	0,00882 89	0,01059 46	0,01236 04	0,01412 62	5
5 1/8	0,00904 42	0,01085 30	0,01266 18	0,01447 07	5 1/8
5 1/4	0,00925 92	0,01111 11	0,01296 29	0,01481 47	5 1/4
5 3/8	0,00947 40	0,01136 88	0,01326 36	0,01515 84	5 3/8
5 1/2	0,00968 85	0,01162 62	0,01356 39	0,01550 16	5 1/2
5 5/8	0,00990 28	0,01188 34	0,01386 39	0,01584 45	5 5/8
5 3/4	0,01011 68	0,01214 02	0,01416 36	0,01618 69	5 3/4
5 7/8	0,01033 06	0,01239 67	0,01446 28	0,01652 89	5 7/8
6	0,01054 41	0,01265 29	0,01476 18	0,01687 06	6
6 1/4	0,01097 04	0,01316 45	0,01535 85	0,01755 26	6 1/4
6 1/2	0,01139 57	0,01367 48	0,01595 39	0,01823 31	6 1/2
6 3/4	0,01182 00	0,01418 39	0,01654 79	0,01891 19	6 3/4
7	0,01224 32	0,01469 19	0,01714 05	0,01958 92	7
7 1/2	0,01308 69	0,01570 42	0,01832 16	0,02093 90	7 1/2
8	0,01392 66	0,01671 19	0,01949 72	0,02228 25	8
9	0,01559 44	0,01871 32	0,02183 21	0,02495 10	9
10	0,01724 70	0,02069 63	0,02414 57	0,02759 51	10
12	0,02050 75	0,02460 90	0,02871 05	0,03281 20	12

TAUX pour 100	9 MOIS	10 MOIS	11 MOIS	12 MOIS	TAUX pour 100
1/8	0,00162 45	0,00180 51	0,00198 56	0,00216 61	1/8
1	0,00324 10	0,00360 11	0,00396 13	0,00432 14	1
1 1/8	0,00484 95	0,00538 84	0,00592 72	0,00646 60	1 1/8
1 3/8	0,00525 04	0,00583 38	0,00641 72	0,00700 06	1 3/8
1 3/4	0,00565 08	0,00627 87	0,00690 65	0,00753 44	1 3/4
1 7/8	0,00605 07	0,00672 30	0,00739 53	0,00806 76	1 7/8
2	0,00645 01	0,00716 68	0,00788 35	0,00860 02	2
2 1/8	0,00684 91	0,00761 01	0,00837 11	0,00913 21	2 1/8
2 1/4	0,00724 75	0,00805 28	0,00885 80	0,00966 33	2 1/4
2 3/8	0,00764 54	0,00849 49	0,00934 44	0,01019 39	2 3/8
2 1/2	0,00804 29	0,00893 66	0,00983 02	0,01072 39	2 1/2
2 5/8	0,00843 99	0,00937 76	0,01031 54	0,01125 32	2 5/8
2 3/4	0,00883 64	0,00981 82	0,01080 00	0,01178 18	2 3/4
2 7/8	0,00923 24	0,01025 82	0,01128 40	0,01230 98	2 7/8
3	0,00962 79	0,01069 77	0,01176 75	0,01283 72	3
3 1/8	0,01002 30	0,01113 66	0,01225 03	0,01336 40	3 1/8
3 1/4	0,01041 75	0,01157 51	0,01273 26	0,01389 01	3 1/4
3 3/8	0,01081 16	0,01201 29	0,01321 42	0,01441 55	3 3/8
3 1/2	0,01120 53	0,01245 03	0,01369 53	0,01494 03	3 1/2
3 5/8	0,01159 84	0,01288 71	0,01417 58	0,01546 45	3 5/8
3 3/4	0,01199 11	0,01332 34	0,01465 58	0,01598 81	3 3/4
3 7/8	0,01238 33	0,01375 92	0,01513 51	0,01651 10	3 7/8
4	0,01277 50	0,01419 44	0,01561 39	0,01703 33	4
4 1/8	0,01316 63	9,01462 92	0,01609 21	0,01755 50	4 1/8
4 1/4	0,01355 70	0,01506 34	0,01656 97	0,01807 61	4 1/4
4 3/8	0,01394 74	0,01549 71	0,01704 68	0,01859 65	4 3/8
4 1/2	0,01433 72	0,01593 02	0,01752 33	0,01911 63	4 1/2
4 5/8	0,01472 66	0,01636 29	0,01799 92	0,01963 55	4 5/8
4 3/4	0,01511 55	0,01679 50	0,01847 45	0,02015 40	4 3/4
4 7/8	0,01550 40	0,01722 66	0,01894 93	0,02067 20	4 7/8
5	0,01589 20	0,01765 77	0,01942 35	0,02118 93	5
5 1/8	0,01627 95	0,01808 83	0,01989 72	0,02170 60	5 1/8
5 1/4	0,01666 66	0,01851 84	0,02037 03	0,02222 21	5 1/4
5 3/8	0,01705 32	0,01894 80	0,02084 28	0,02273 76	5 3/8
5 1/2	0,01743 93	0,01937 70	0,02131 48	0,02325 25	5 1/2
5 5/8	0,01782 50	0,01980 56	0,02178 62	0,02376 67	5 5/8
5 3/4	0,01821 03	0,02023 36	0,02225 70	0,02428 04	5 3/4
5 7/8	0,01859 51	0,02066 12	0,02272 73	0,02479 34	5 7/8
6	0,01897 94	0,02108 82	0,02319 70	0,02530 59	6
6 1/4	0,01974 67	0,02194 08	0,02413 49	0,02632 89	6 1/4
6 1/2	0,02051 22	0,02279 13	0,02507 05	0,02734 96	6 1/2
6 3/4	0,02127 59	0,02363 99	0,02600 39	0,02836 79	6 3/4
7	0,02203 78	0,02448 65	0,02693 51	0,02938 38	7
7 1/2	0,02355 63	0,02617 37	0,02879 11	0,03140 85	7 1/2
8	0,02506 78	0,02785 31	0,03063 84	0,03342 38	8
9	0,02806 99	0,03118 87	0,03430 76	0,03742 65	9
10	0,03104 45	0,03449 39	0,03794 33	0,04139 27	10
12	0,03691 35	0,04101 50	0,04511 65	0,04921 80	12

APPLICATION DE LA TABLE III (page 59).

La Table III (page 59) donne directement le logarithme de $(1+t)$ pour des valeurs très-minimes du taux t, de plus elle est susceptible d'une grande application et peut, *en cas de besoin*, remplacer les Tables de logarithmes à 7 décimales.

§ Ier. — *Logarithme de $(1+t)$ pour tous les taux intermédiaires non compris dans la Table.*

La troisième colonne contient les logarithmes à 8 décimales de tous les nombres naturels depuis 100001 jusqu'à 100100; par exemple

$$\log 1,00074 = 0,00032\ 126.$$

Mais si $a < 0,001$, on a, à 8 chiffres exacts : $\log\left(1+\frac{a}{100}\right) = \frac{1}{100}\log(1+a)$;

par exemple
$$\log 1,00000\ 74 = 0,00000\ 321,$$
$$\log 1,00000\ 074 = 0,00000\ 032,$$
$$\log 1,00000\ 007 = 0,00000\ 003;$$

et, de même : $\log\left(1+a+\frac{b}{100}\right) = \log(1+a) + \log\left(1+\frac{b}{100}\right)$;

par exemple $\log 1,00074\ 746 = \log 1,00074 + \log 1,00000\ 74 + \log 1,00000\ 006$,

ou, en unités du 8e ordre,
$$\begin{array}{r} = 32\ 126 \\ 321 \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

donc $\log 1,00074\ 746 = 0,00032\ 450$, exact au dernier chiffre.

§ II. — *Recherche du logarithme d'un nombre quelconque.*

Pour obtenir le logarithme d'un nombre donné, on divise ce dernier par le nombre exprimé par ses deux premiers chiffres, puis on divise le quotient par le nombre exprimé par ses quatre premiers chiffres (les deux quotients avec 8 décimales).

Or le logarithme du premier diviseur se trouvera *toujours* dans la première colonne, celui du second diviseur se trouvera *toujours* dans la deuxième colonne, et celui du dernier quotient s'obtiendra à l'aide de la troisième colonne.

Par conséquent, tout nombre dont on cherche le logarithme sera décomposé en trois facteurs dont on connaît les logarithmes, et la somme de ces logarithmes sera égale au logarithme demandé.

Exemple. — *On demande le logarithme de* $a = 25,619135$. On a $a = 25 \times 1,024\ 76540$, $1,024\ 76540 = 1,024 \times 1,00074\ 746$;

et
$$\begin{array}{rrl} \log 25 = & 1,39794\ 00 & \text{1re colonne} \\ \log 1,024 = & 1030\ 00 & \text{2e colonne} \\ \log 1,00074\ 746 = & 32\ 45 & \text{3e colonne} \\ \hline \end{array}$$

donc $\log 25,619135 = 1,40856\ 45$

§ III. — *Recherche du nombre.*

Le calcul du nombre correspondant à un logarithme donné est également simple : du logarithme donné on retranche celui de la première colonne qui s'en approche le plus par défaut; puis, du reste, on retranche le plus grand logarithme possible de la deuxième colonne; ensuite on cherche dans la troisième colonne le nombre correspondant au second reste. Par conséquent, le logarithme donné est décomposé en trois logarithmes, et le produit des trois nombres qui leur correspondent sera égal au nombre cherché.

Exemple. — *On donne* $\log x = 1,40856\ 45$. On a $\log 25 = 1,39794\ 00$:

$$\begin{array}{rrl} & 1062\ 45 & \\ \log 1,024 = & 1030\ 00 & \text{2e colonne} \\ \hline & 32\ 450 & \\ \log 1,00074\ 747 = & 32\ 450 & \text{3e colonne,} \end{array}$$

donc $x = 25 \times 1,024 \times 1,00074\ 747 = 25,619135$.

TABLE III

CONTENANT LES LOGARITHMES DE t, DE r, DE $\log r$ ET DE $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

Cette Table se divise en trois parties :

La première contient, pour les taux indiqués dans les colonnes verticales extrêmes, et croissant en général par huitièmes, les logarithmes à 10 décimales de t et de r, et les logarithmes à 7 décimales de $\log r$, désignés par $\log^2 r$.

La seconde contient, pour les taux compris entre $\frac{1}{12}$ pour 100 et 10 pour 100, et croissant par douzièmes, les logarithmes à 7 décimales de t et les logarithmes à 10 décimales de r, à l'exception de ceux qui se trouvent déjà inscrits dans la partie précédente.

La troisième contient, pour les taux compris entre $\frac{1}{10}$ pour 100 et 10 pour 100, et croissant par dixièmes, les logarithmes à 7 décimales de t et de r et les logarithmes à 8 décimales de $\left(1+\frac{t}{100}\right)$.

TAUX pour 100	log *t*	log *r*	log² *r*	TAUX pour 100
1/8	7,69897 00043	0,00216 60618	7,33567 08	1/8
1	8,00000 00000	0,00432 13738	7,63562 18	1
1 1/8	8,17609 12591	0,00646 60422	7,81063 85	1 1/8
1 1/4	8,21085 33653	0,00700 05586	7,84513 27	1 1/4
1 3/8	8,24303 80487	0,00753 44179	7,87704 97	1 3/8
1 1/2	8,27300 12721	0,00806 76217	7,90674 55	1 1/2
2	8,30102 99957	0,00860 01718	7,93450 71	2
2 1/8	8,32735 89343	0,00913 20695	7,96056 92	2 1/8
2 1/4	8,35218 25181	0,00966 33167	7,98512 62	2 1/4
2 3/8	8,37566 36140	0,01019 39148	8,00834 10	2 3/8
2 1/2	8,39794 00087	0,01072 38654	8,03035 14	2 1/2
2 5/8	8,41912 93077	0,01125 31701	8,05127 49	2 5/8
2 3/4	8,43933 26938	0,01178 18305	8,07121 28	2 3/4
2 7/8	8,45863 78490	0,01230 98482	8,09025 27	2 7/8
3	8,47712 12547	0,01283 72247	8,10847 11	3
3 1/8	8,49485 00217	0,01336 39616	8,12593 52	3 1/8
3 1/4	8,51188 33610	0,01389 00603	8,14270 41	3 1/4
3 3/8	8,52827 37772	0,01441 55226	8,15883 04	3 3/8
3 1/2	8,54406 80414	0,01494 03498	8,17436 08	3 1/2
3 5/8	8,55930 80109	0,01546 45436	8,18933 71	3 5/8
3 3/4	8,57403 12677	0,01598 81054	8,20379 70	3 3/4
3 7/8	8,58827 17068	0,01651 10368	8,21777 43	3 7/8
4	8,60205 99913	0,01703 33393	8,23129 98	4
4 1/8	8,61542 39529	0,01755 50144	8,24440 12	4 1/8
4 1/4	8,62838 89301	0,01807 60636	8,25710 39	4 1/4
4 3/8	8,64097 80574	0,01859 64885	8,26943 10	4 3/8
4 1/2	8,65321 25138	0,01911 62904	8,28140 36	4 1/2
4 5/8	8,66511 17371	0,01963 54710	8,29304 13	4 5/8
4 3/4	8,67669 36096	0,02015 40316	8,30436 19	4 3/4
4 7/8	8,68797 46200	0,02067 19738	8,31538 19	4 7/8
5	8,69897 00043	0,02118 92991	8,32611 66	5
5 1/8	8,70969 38697	0,02170 60088	8,33658 00	5 1/8
5 1/4	8,72015 93034	0,02222 21045	8,34678 52	5 1/4
5 3/8	8,73037 84686	0,02273 75876	8,35674 44	5 3/8
5 1/2	8,74036 26895	0,02325 24596	8,36646 89	5 1/2
5 5/8	8,75012 25268	0,02376 67220	8,37596 93	5 5/8
5 3/4	8,75966 78447	0,02428 03760	8,38525 54	5 3/4
5 7/8	8,76900 78709	0,02479 34233	8,39433 65	5 7/8
6	8,77815 12504	0,02530 58653	8,40322 12	6
6 1/4	8,79588 00173	0,02632 89387	8,42043 34	6 1/4
6 1/2	8,81291 33566	0,02734 96078	8,43695 11	6 1/2
6 3/4	8,82930 37728	0,02836 78837	8,45282 69	6 3/4
7	8,84509 80400	0,02938 37777	8,46810 76	7
7 1/2	8,87506 12634	0,03140 84643	8,49704 67	7 1/2
8	8,90308 99870	0,03342 37555	8,52405 52	8
9	8,95424 25094	0,03742 64979	8,57317 92	9
10	9,00000 00000	0,04139 26852	8,61692 36	10
12	9,07918 12460	0,04921 80227	8,69212 42	12

TAUX pour 100	log *r*	log *t*	log *t*	log *r*	TAUX pour 100
1/12	0,00036 17614	6,92081 88	8,70614 86	0,02153 38405	5 1/12
1/6	0,00072 32216	7,22184 87	8,71321 04	0,02187 81089	5 1/6
1/3	0,00144 52409	7,52287 87	8,72699 87	0,02256 58279	5 1/3
5/12	0,00180 58009	7,61978 88	8,73373 21	0,02290 92795	5 5/12
7/12	0,00252 60240	7,76591 68	8,74689 36	0,02359 53688	5 7/12
2/3	0,00288 56882	7,82390 87	8,75332 77	0,02393 80075	5 2/3
5/6	0,00360 41243	7,92081 88	8,76591 68	0,02462 24749	5 5/6
11/12	0,00396 28971	7,96221 14	8,77207 71	0,02496 43045	5 11/12
1 1/12	0,00467 95548	8,03476 21	8,78414 16	0,02564 71576	6 1/12
1 1/6	0,00503 74407	8,06694 68	8,79005 05	0,02598 81820	6 1/6
1 1/3	0,00575 23289	8,12493 87	8,80163 23	0,02666 94283	6 1/3
1 5/12	0,00610 93322	8,15126 77	8,80730 95	0,02700 96512	6 5/12
1 7/12	0,00682 24596	8,19957 24	8,81844 58	0,02768 92984	6 7/12
1 2/3	0,00717 85846	8,22184 87	8,82390 87	0,02802 87236	6 2/3
1 5/6	0,00788 99599	8,26324 14	8,83463 26	0,02870 67791	6 5/6
1 11/12	0,00824 52110	8,28254 66	8,83989 68	0,02904 54103	6 11/12
2 1/12	0,00895 48427	8,31875 88	8,85023 77	0,02972 18816	7 1/12
2 1/6	0,00930 92241	8,33579 21	8,85531 72	0,03005 97225	7 1/6
2 1/3	0,01001 71208	8,36797 68	8,86530 14	0,03073 46170	7 1/3
2 5/12	0,01037 06368	8,38321 68	8,87020 88	0,03107 16713	7 5/12
2 7/12	0,01107 68069	8,41218 04	8,87986 01	0,03174 49962	7 7/12
2 2/3	0,01142 94618	8,42596 87	8,88460 66	0,03208 12676	7 2/3
2 5/6	0,01213 39136	8,45229 77	8,89394 66	0,03275 30303	7 5/6
2 11/12	0,01248 57115	8,46488 68	8,89854 24	0,03308 85224	7 11/12
3 1/12	0,01318 84536	8,48902 05	8,90759 05	0,03375 87300	8 1/12
3 1/6	0,01353 93986	8,50060 24	8,91204 48	0,03409 34464	8 1/6
3 1/3	0,01424 04391	8,52287 87	8,92081 88	0,03476 21063	8 1/3
3 5/12	0,01459 05355	8,53360 26	8,92514 01	0,03509 60505	8 5/12
3 7/12	0,01528 98826	8,55428 72	8,93365 60	0,03576 31697	8 7/12
3 2/3	0,01563 91343	8,56427 14	8,93785 21	0,03609 63453	8 2/3
3 5/6	0,01633 67963	8,58357 66	8,94612 46	0,03676 19309	8 5/6
3 11/12	0,01668 52074	8,59291 66	8,95020 25	0,03709 43415	8 11/12
4 1/12	0,01738 11923	8,61101 48	8,95824 53	0,03775 84005	9 1/12
4 1/6	0,01772 87670	8,61978 88	8,96221 14	0,03809 00496	9 1/6
4 1/3	0,01842 30828	8,63682 21	8,97003 68	0,03875 25890	9 1/3
4 5/12	0,01876 98249	8,64509 46	8,97389 72	0,03908 34800	9 5/12
4 7/12	0,01946 24798	8,66118 14	8,98151 66	0,03974 45068	9 7/12
4 2/3	0,01980 83934	8,66900 68	8,98527 67	0,04007 46432	9 2/3
4 5/6	0,02049 93951	8,68424 67	8,99270 08	0,04073 41642	9 5/6
4 11/12	0,02084 44841	8,69167 08	8,99636 57	0,04106 35495	9 11/12

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045,$$

$$k = \log e = 0,43429\ 44819\ 03252,$$

$$\frac{1}{k} = \log_e 10 = 2,30258\ 50929\ 94046,$$

$$\log k = 9,63778\ 43113\ 00537,$$

$$\log(1+x) = k\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

TAUX pour 100	log (t)	log (1+t)	log $\left(1+\frac{t}{100}\right)$	log $\left(1+\frac{t}{100}\right)$	log (1+t)	log (t)	TAUX pour 100
		0,000	0,00000	0,000	0,0		
0,1	7,00000 00	43 41	434	22 143	2160 27	8,70757 02	5,1
0,2	7,30103 00	86 77	869	22 577	2201 57	8,71600 33	5,2
0,3	7,47712 13	130 09	1 303	23 012	2242 84	8,72427 59	5,3
0,4	7,60206 00	173 37	1 737	23 446	2284 06	8,73239 38	5,4
0,5	7,69897 00	216 61	2 171	23 880	2325 25	8,74036 17	5,5
0,6	7,77815 13	259 80	2 606	24 314	2366 39	8,74818 80	5,6
0,7	7,84509 80	302 95	3 040	24 748	2407 50	8,75587 49	5,7
0,8	7,90309 00	346 05	3 474	25 182	2448 57	8,76342 80	5,8
0,9	7,95424 25	389 12	3 908	25 616	2489 60	8,77085 20	5,9
1	8,00000 00	432 14	4 343	26 050	2530 59	8,77815 13	6
1,1	8,04139 27	475 12	4 777	26 484	2571 54	8,78532 98	6,1
1,2	8,07918 12	518 05	5 211	26 918	2612 45	8,79239 17	6,2
1,3	8,11394 34	560 94	5 645	27 352	2653 33	8,79934 05	6,3
1,4	8,14612 80	603 80	6 080	27 786	2694 16	8,80618 00	6,4
1,5	8,17609 13	646 60	6 514	28 220	2734 96	8,81291 34	6,5
1,6	8,20412 00	689 37	6 948	28 654	2775 72	8,81954 39	6,6
1,7	8,23044 89	732 10	7 382	29 088	2816 44	8,82607 48	6,7
1,8	8,25527 25	774 78	7 817	29 522	2857 13	8,83250 89	6,8
1,9	8,27875 36	817 42	8 251	29 956	2897 77	8,83884 91	6,9
2	8,30103 00	860 02	8 685	30 390	2938 38	8,84509 80	7
2,1	8,32221 93	902 57	9 119	30 824	2978 95	8,85125 83	7,1
2,2	8,34242 27	945 09	9 553	31 258	3019 48	8,85733 25	7,2
2,3	8,36172 78	987 56	9 988	31 692	3059 97	8,86332 29	7,3
2,4	8,38021 12	1030 00	10 422	32 126	3100 43	8,86923 17	7,4
2,5	8,39794 00	1072 39	10 856	32 560	3140 85	8,87506 13	7,5
2,6	8,41497 33	1114 74	11 290	32 994	3181 23	8,88081 36	7,6
2,7	8,43136 38	1157 04	11 724	33 428	3221 57	8,88649 07	7,7
2,8	8,44715 80	1199 31	12 159	33 862	3261 88	8,89209 46	7,8
2,9	8,46239 80	1241 54	12 593	34 296	3302 14	8,89762 71	7,9
3	8,47712 13	1283 72	13 027	34 730	3342 38	8,90309 00	8
3,1	8,49136 17	1325 87	13 461	35 164	3382 57	8,90848 50	8,1
3,2	8,50515 00	1367 97	13 895	35 598	3422 73	8,91381 39	8,2
3,3	8,51851 39	1410 03	14 329	36 031	3462 85	8,91907 81	8,3
3,4	8,53147 89	1452 05	14 764	36 465	3502 93	8,92427 93	8,4
3,5	8,54406 80	1494 03	15 198	36 899	3542 97	8,92941 89	8,5
3,6	8,55630 25	1535 98	15 632	37 333	3582 98	8,93449 85	8,6
3,7	8,56820 17	1577 88	16 066	37 767	3622 95	8,93951 93	8,7
3,8	8,57978 36	1619 74	16 500	38 201	3662 89	8,94448 27	8,8
3,9	8,59106 46	1661 55	16 934	38 635	3702 79	8,94939 00	8,9
4	8,60206 00	1703 33	17 368	39 069	3742 65	8,95424 25	9
4,1	8,61278 39	1745 07	17 802	39 503	3782 48	8,95904 14	9,1
4,2	8,62324 93	1786 77	18 237	39 937	3822 26	8,96378 78	9,2
4,3	8,63346 85	1828 43	18 671	40 371	3862 02	8,96848 29	9,3
4,4	8,64345 27	1870 05	19 105*	40 805*	3901 73	8,97312 79	9,4
4,5	8,65321 25	1911 63	19 539	41 238	3941 41	8,97772 36	9,5
4,6	8,66275 78	1953 17	19 973	41 672	3981 06	8,98227 12	9,6
4,7	8,67209 79	1994 67	20 407	42 106	4020 66	8,98677 17	9,7
4,8	8,68124 12	2036 13	20 841	42 540	4060 23	8,99122 61	9,8
4,9	8,69019 61	2077 55	21 275	42 974	4099 77	8,99563 52	9,9
5	8,69897 00	2118 93	21 709	43 408	4139 27	9,00000 00	10

TABLE IV

CONTENANT LES LOGARITHMES DES NOMBRES Q_2, Q_4, P_2, P_4, P_6 ET P_{12}.

Cette Table contient, pour tous les taux inscrits dans les lignes verticales extrêmes, les logarithmes à 7 décimales des nombres Q_2 et Q_4, ainsi que ceux des nombres P_2, P_4, P_6, P_{12}.

Les nombres précédents sont définis par les formules suivantes :

$$Q_2 = \frac{\left(1+\frac{t}{2}\right)^2 - 1}{t}; \qquad Q_4 = \frac{\left(1+\frac{t}{4}\right)^4 - 1}{t};$$

$$P_2 = \frac{\frac{t}{2}}{r^{\frac{1}{2}} - 1}; \qquad P_4 = \frac{\frac{t}{4}}{r^{\frac{1}{4}} - 1};$$

$$P_6 = \frac{\frac{t}{6}}{r^{\frac{1}{6}} - 1}; \qquad P_{12} = \frac{\frac{t}{12}}{r^{\frac{1}{12}} - 1}.$$

Les logarithmes de ces nombres doivent être pris dans les lignes horizontales correspondantes au taux t.

TAUX pour 100	$\log Q_2$	$\log Q_4$	$\log P_2$	$\log P_4$	$\log P_6$	$\log P_{12}$	TAUX pour 100
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	
1/4	00027 13	00040 71	00027 12	00040 67	00045 19	00049 71	1/4
1/2	00054 25	00081 42	00054 19	00081 27	00090 30	00099 32	1/2
3/4	00081 33	00122 13	00081 20	00121 78	00135 31	00148 83	3/4
1	00108 44	00162 83	00108 17	00162 22	00180 23	00198 24	1
1 1/4	00135 51	00203 52	00135 09	00202 58	00225 06	00247 55	1 1/4
1 1/2	00162 56	00244 21	00161 95	00242 85	00269 81	00296 76	1 1/2
1 5/8	00176 07	00264 56	00175 37	00262 96	00292 15	00321 33	1 5/8
1 3/4	00189 59	00284 90	00188 77	00283 05	00314 46	00345 87	1 3/4
1 7/8	00203 10	00305 24	00202 16	00303 12	00336 76	00370 39	1 7/8
2	00216 61	00325 58	00215 54	00323 17	00359 03	00394 88	2
2 1/8	00230 11	00345 92	00228 90	00343 20	00381 28	00419 35	2 1/8
2 1/4	00243 61	00366 26	00242 25	00363 21	00403 51	00443 80	2 1/4
2 3/8	00257 10	00386 60	00255 60	00383 21	00425 72	00468 22	2 3/8
2 1/2	00270 59	00406 94	00268 92	00403 18	00447 90	00492 61	2 1/2
2 5/8	00284 07	00427 27	00282 24	00423 13	00470 06	00516 98	2 5/8
2 3/4	00297 56	00447 61	00295 54	00443 07	00492 20	00541 32	2 3/4
2 7/8	00311 03	00467 94	00308 84	00462 98	00514 32	00565 64	2 7/8
3	00324 51	00488 27	00322 12	00482 88	00536 42	00589 94	3
3 1/8	00337 97	00508 60	00335 38	00502 76	00558 49	00614 21	3 1/8
3 1/4	00351 44	00528 93	00348 64	00522 61	00580 55	00638 46	3 1/4
3 3/8	00364 90	00549 26	00361 88	00542 45	00602 58	00662 69	3 3/8
3 1/2	00378 35	00569 59	00375 11	00562 27	00624 60	00686 89	3 1/2
3 5/8	00391 81	00589 92	00388 33	00582 08	00646 58	00711 07	3 5/8
3 3/4	00405 25	00610 24	00401 54	00601 86	00668 56	00735 23	3 3/4
3 7/8	00418 70	00630 57	00414 74	00621 62	00690 51	00759 36	3 7/8
4	00432 14	00650 89	00427 92	00641 36	00712 43	00783 46	4
4 1/8	00445 57	00671 22	00441 09	00661 08	00734 33	00807 54	4 1/8
4 1/4	00459 00	00691 54	00454 25	00680 79	00756 22	00831 60	4 1/4
4 3/8	00472 43	00711 86	00467 40	00700 48	00778 08	00855 63	4 3/8
4 1/2	00485 85	00732 18	00480 54	00720 15	00799 92	00879 65	4 1/2
4 5/8	00499 27	00752 50	00493 66	00739 80	00821 74	00903 64	4 5/8
4 3/4	00512 69	00772 81	00506 77	00759 43	00843 54	00927 59	4 3/4
4 7/8	00526 10	00793 13	00519 87	00779 04	00865 32	00951 53	4 7/8
5	00539 50	00813 44	00532 96	00798 64	00887 08	00975 45	5
5 1/8	00552 91	00833 76	00546 04	00818 21	00908 81	00999 35	5 1/8
5 1/4	00566 30	00854 07	00559 11	00837 77	00930 52	01023 22	5 1/4
5 3/8	00579 70	00874 38	00572 16	00857 31	00952 22	01047 07	5 3/8
5 1/2	00593 09	00894 69	00585 20	00876 83	00973 90	01070 89	5 1/2
5 5/8	00606 47	00915 00	00598 23	00896 33	00995 55	01094 69	5 5/8
5 3/4	00619 85	00935 31	00611 25	00915 82	01017 18	01118 49	5 3/4
5 7/8	00633 23	00955 62	00624 26	00935 28	01038 79	01142 22	5 7/8
6	00646 60	00975 92	00637 25	00954 73	01060 38	01165 95	6
6 1/4	00673 34	01016 53	00663 21	00993 57	01103 50	01213 35	6 1/4
6 1/2	00700 06	01057 14	00689 12	01032 34	01146 54	01260 65	6 1/2
6 3/4	00726 76	01097 74	00714 99	01071 03	01189 50	01307 86	6 3/4
7	00753 44	01138 33	00740 81	01109 66	01232 37	01354 98	7
7 1/2	00806 76	01219 51	00792 31	01186 69	01317 84	01448 95	7 1/2
8	00860 02	01300 67	00843 63	01263 41	01403 07	01542 56	8
9	00966 33	01462 93	00945 74	01416 09	01572 50	01728 73	9
10	01072 39	01625 13	01047 14	01567 64	01740 68	01913 49	10
12	01283 72	01949 30	01247 88	01867 46	02073 34	02278 90	12

TABLE V.

LOGARITHMES DES LOGARITHMES DES NOMBRES NATURELS DE 1 A 100.

Les trois Tables que nous allons présenter ne font pas partie de l'Ouvrage anglais dont nous avons donné la traduction; elles ont été retrouvées dans les papiers de Fédor Thoman, ainsi que les quatre pages servant de supplément à la Table I.

TABLE V. — *Logarithmes des logarithmes des nombres naturels de 1 à 100.*

a	$\log^2 a$	a	$\log^2 a$
1	$-\infty$	51	0,232 3786
2	9,478 6098	52	0,234 5181
3	9,678 6288	53	0,236 6068
4	9,779 6398	54	0,238 6466
5	9,844 4585	55	0,240 6398
6	9,891 0640	56	0,242 5881
7	9,926 9071	57	0,244 4936
8	9,955 7310	58	0,246 3577
9	9,979 6588	59	0,248 1823
10	0	60	0,249 9687
11	0,017 6145	61	0,251 7185
12	0,033 0944	62	0,253 4329
13	0,046 8631	63	0,255 1134
14	0,059 2331	64	0,256 7610
15	0,070 4410	65	0,258 3770
16	0,080 6698	66	0,259 9625
17	0,090 0636	67	0,261 5186
18	0,098 7380	68	0,263 0461
19	0,106 7869	69	0,264 5461
20	0,114 2873	70	0,266 0194
21	0,121 3035	71	0,267 4670
22	0,127 8893	72	0,268 8897
23	0,134 0903	73	0,270 2881
24	0,139 9456	74	0,271 6631
25	0,145 4885	75	0,273 0155
26	0,150 7483	76	0,274 3458
27	0,155 7500	77	0,275 6547
28	0,160 5160	78	0,276 9428
29	0,165 0656	79	0,278 2109
30	0,169 4161	80	0,279 4593
31	0,173 5830	81	0,280 6888
32	0,177 5798	82	0,281 8997
33	0,181 4188	83	0,283 0926
34	0,185 1110	84	0,284 2681
35	0,188 6664	85	0,285 4265
36	0,192 0940	86	0,286 5684
37	0,195 4019	87	0,287 6941
38	0,198 5976	88	0,288 8041
39	0,201 6878	89	0,289 8987
40	0,204 6788	90	0,290 9785
41	0,207 5762	91	0,292 0436
42	0,210 3852	92	0,293 0946
43	0,213 1108	93	0,294 1317
44	0,215 7572	94	0,295 1552
45	0,218 3287	95	0,296 1656
46	0,220 8290	96	0,297 1631
47	0,223 2617	97	0,298 1480
48	0,225 6300	98	0,299 1206
49	0,227 9371	99	0,300 0812
50	0,230 1857	100	0,301 0300

TABLE VI

CONTENANT, POUR TOUS LES TAUX COMPRIS ENTRE 2 ET 3 POUR 100
ET CROISSANT PAR CENTIÈMES :

1° $\log r$, 2° r^2.

TABLE VI. — *Contenant, pour tous les taux compris entre* 2 *et* 3 *pour* 100 *et croissant par centièmes :*

1° log r, 2° r^2.

r	log r	r^2	r^2	log r	r
1,0200	0,008 6001 718	1,040 400	1,050 83001	0,010 7662 335	1,0251
1	6427 476	60401	1,051 03504	8085 975	52
2	6853 192	80804	24009	8509 574	53
3	7278 867	1,041 01209	44516	8933 131	54
4	7704 499	21616	65025	9356 647	55
5	8130 091	42025	85536	9780 122	56
6	8555 640	62436	1,052 06049	0,011 0203 555	57
7	8981 148	82849	26564	0626 947	58
8	9406 614	1,042 03264	47081	1050 298	59
9	9832 038	23681	676	1473 608	1,0260
1,0210	0,009 0257 421	44100	88121	1896 876	61
11	0682 762	64521	1,053 08644	2320 103	62
12	1108 061	84944	29169	2743 289	63
13	1533 319	1,043 05369	49691	3166 434	64
14	1958 535	25796	70225	3589 537	65
15	2383 710	46225	90756	4012 599	66
16	2808 843	66656	1,054 11289	4435 620	67
17	3233 934	87089	31824	4858 600	68
18	3658 983	1,044 07524	52361	5281 539	69
19	4083 992	27961	729	5704 436	1,0270
1,0220	4508 958	484	93441	6127 292	71
21	4933 883	68841	1,055 13984	6550 107	72
22	5358 766	89284	34529	6972 881	73
23	5783 608	1,045 09729	55076	7395 614	74
24	6208 408	30176	75625	7818 305	75
25	6633 167	50625	96176	8240 956	76
26	7057 884	71076	1,056 16729	8663 565	77
27	7482 559	91529	37284	9086 133	78
28	7907 194	1,046 11984	57841	9508 661	79
29	8331 786	32441	784	9931 147	1,0280
1,0230	8756 327	529	98961	0,012 0353 591	81
31	9180 847	73361	1,057 19524	0775 995	82
32	9605 315	93824	40089	1198 358	83
33	0,010 0029 741	1,047 14289	60656	1620 680	84
34	0454 126	34756	81225	2042 960	85
35	0878 470	55225	1,058 01796	2465 200	86
36	1302 772	75696	22369	2887 398	87
37	1727 003	96169	42944	3309 556	88
38	2151 252	1,048 16644	63521	3731 672	89
39	2575 430	37121	841	4153 748	1,0290
1,0240	2999 566	576	1,059 04681	4575 782	91
41	3423 661	78081	25264	4997 775	92
42	3847 715	98564	45849	5419 728	93
43	4271 727	1,049 19049	66436	5841 639	94
44	4695 698	39536	87025	6263 510	95
45	5119 627	60025	07616	6685 339	96
46	5543 515	80516	28209	7107 127	97
47	5967 362	1,050 01000	48804	7528 875	98
48	6391 167	21504	69401	7950 581	99
49	6814 931	42001	1,060 9	0,012 8372 247	1,0300
1,0250	7238 654	62500			

TABLE VII

PRÉSENTANT, POUR TOUS LES TAUX COMPRIS ENTRE $\frac{1}{8}$ ET 12 POUR 100,
ET CROISSANT PAR HUITIÈMES :

$1^{\circ}\ r,\quad 2^{\circ}\ r^2,\quad 3^{\circ}\ \log(1+r).$

TABLE VII. — *Présentant, pour tous les taux compris entre* $^1/_8$ *et* 12 *pour* 100 *et croissant par huitièmes :*

1° r, 2° r^2, 3° $\log(1+r)$.

TAUX %	r	r^2	$\log(1+r)$	r	r^2	$\log(1+r)$	TAUX %
$^1/_8$	1,00125	1,0025 015625	301 3014	1,06	1,1236	313 8672	6
$^1/_4$	1,0025	1,0050 0625	301 5725	1,06125	1,1262 515625	314 1307	6 $^1/_8$
$^3/_8$	1,00375	1,0075 140625	301 8436	1,0625	1,1289 0625	314 3940	6 $^1/_4$
$^1/_2$	1,005	1,0100 25	302 1144	1,06375	1,1315 640625	314 6571	6 $^3/_8$
$^5/_8$	1,00625	1,0125 390625	302 3851	1,065	1,1342 25	314 9201	6 $^1/_2$
$^3/_4$	1,0075	1,0150 5625	302 6556	1,06625	1,1368 890625	315 1829	6 $^5/_8$
$^7/_8$	1,00875	1,0175 765625	302 9259	1,0675	1,1395 5625	315 4455	6 $^3/_4$
				1,06875	1,1422 265625	315 7080	6 $^7/_8$
1	1,01	1,0201	303 1961				
1 $^1/_8$	1,01125	1,0226 265625	303 4661	1,07	1,1449	315 9703	7
1 $^1/_4$	1,0125	1,0251 5625	303 7359	1,07125	1,1475 765625	316 2325	7 $^1/_8$
1 $^3/_8$	1,01375	1,0276 890625	304 0056	1,0725	1,1502 5625	316 4945	7 $^1/_4$
1 $^1/_2$	1,015	1,0302 25	304 2751	1,07375	1,1529 390625	316 7564	7 $^3/_8$
1 $^5/_8$	1,01625	1,0327 640625	304 5444	1,075	1,1556 25	317 0181	7 $^1/_2$
1 $^3/_4$	1,0175	1,0353 0625	304 8135	1,07625	1,1583 140625	317 2797	7 $^5/_8$
1 $^7/_8$	1,01875	1,0378 515625	305 0826	1,0775	1,1610 0625	317 5410	7 $^3/_4$
				1,07875	1,1637 015625	317 8023	7 $^7/_8$
2	1,02	1,0404	305 3514				
2 $^1/_8$	1,02125	1,0429 515625	305 6201	1,08	1,1664	318 0633	8
2 $^1/_4$	1,0225	1,0455 0625	305 8885	1,08125	1,1691 015625	318 3243	8 $^1/_8$
2 $^3/_8$	1,02375	1,0480 640625	306 1569	1,0825	1,1718 0625	318 5850	8 $^1/_4$
2 $^1/_2$	1,025	1,0506 25	306 4250	1,08375	1,1745 140625	318 8456	8 $^3/_8$
2 $^5/_8$	1,02625	1,0531 890625	306 6930	1,085	1,1772 25	319 1061	8 $^1/_2$
2 $^3/_4$	1,0275	1,0557 5625	306 9609	1,08625	1,1799 390625	319 3664	8 $^5/_8$
2 $^7/_8$	1,02875	1,0583 265625	307 2285	1,0875	1,1826 5625	319 6265	8 $^3/_4$
				1,08875	1,1853 765625	319 8865	8 $^7/_8$
3	1,03	1,0609	307 4960				
3 $^1/_8$	1,03125	1,0634 765625	307 7634	1,09	1,1881	320 1463	9
3 $^1/_4$	1,0325	1,0660 5625	308 0306	1,09125	1,1908 265625	320 4060	9 $^1/_8$
3 $^3/_8$	1,03375	1,0686 390625	308 2976	1,0925	1,1935 5625	320 6655	9 $^1/_4$
3 $^1/_2$	1,035	1,0712 25	308 5644	1,09375	1,1962 890625	320 9249	9 $^3/_8$
3 $^5/_8$	1,03625	1,0738 140625	308 8311	1,095	1,1990 25	321 1840	9 $^1/_2$
3 $^3/_4$	1,0375	1,0764 0625	309 0976	1,09625	1,2017 640625	321 4431	9 $^5/_8$
3 $^7/_8$	1,03875	1,0790 015625	309 3640	1,0975	1,2045 0625	321 7020	9 $^3/_4$
				1,09875	1,2072 515625	321 9608	9 $^7/_8$
4	1,04	1,0816	309 6302				
4 $^1/_8$	1,04125	1,0842 015625	309 8962	1,10	1,2100	322 2193	10
4 $^1/_4$	1,0425	1,0868 0625	310 1621	1,10125	1,2127 515625	322 4778	10 $^1/_8$
4 $^3/_8$	1,04375	1,0894 140625	310 4278	1,1025	1,2155 0625	322 7360	10 $^1/_4$
4 $^1/_2$	1,045	1,0920 25	310 6933	1,10375	1,2182 640625	322 9942	10 $^3/_8$
4 $^5/_8$	1,04625	1,0946 390625	310 9587	1,105	1,2210 25	323 2521	10 $^1/_2$
4 $^3/_4$	1,0475	1,0972 5625	311 2239	1,10625	1,2237 890625	323 5099	10 $^5/_8$
4 $^7/_8$	1,04875	1,0998 765625	311 4890	1,1075	1,2265 5625	323 7676	10 $^3/_4$
				1,10875	1,2293 265625	324 0251	10 $^7/_8$
5	1,05	1,1025	311 7539				
5 $^1/_8$	1,05125	1,1051 265625	312 0186	1,11	1,2321	324 2825	11
5 $^1/_4$	1,0525	1,1077 5625	312 2832	1,11125	1,2348 765625	324 5397	11 $^1/_8$
5 $^3/_8$	1,05375	1,1103 890625	312 5476	1,1125	1,2376 5625	324 7967	11 $^1/_4$
5 $^1/_2$	1,055	1,1130 25	312 8118	1,11375	1,2404 390625	325 0536	11 $^3/_8$
5 $^5/_8$	1,05625	1,1156 640625	313 0760	1,115	1,2432 25	325 3104	11 $^1/_2$
5 $^3/_4$	1,0575	1,1183 0625	313 3398	1,11625	1,2460 140625	325 5670	11 $^5/_8$
5 $^7/_8$	1,05875	1,1209 515625	313 6037	1,1175	1,2488 0625	325 8234	11 $^3/_4$
				1,11875	1,2516 015625	326 0798	11 $^7/_8$

TABLES DE LOGARITHMES

A 11 DÉCIMALES.

TABLE VIII.

RECHERCHE DU LOGARITHME

a	$\frac{1}{a}$	$\log\frac{1}{a}$	$k\theta$	$k\theta$	$\log\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	a
11	9091	95860 731484	4,77724	24,3205	25181 197299	1786	56
12	8333	92081 875395	5,21153	24,7548	24412 514433	1754	57
13	7692	88605 664769	5,64583	25,1891	23657 200644	1724	58
14	7143	85387 196432	6,08012	25,6234	22914 798836	1695	59
15	6667	82390 874094	6,51442	26,0577	22184 874962	1667	60
16	625	79588 001734	6,94871	26,4920	21467 016499	1639	61
17	5882	76955 107862	7,38301	26,9263	20760 831050	1613	62
18	5556	74472 749490	7,81730	27,3606	20065 945055	1587	63
19	5263	72124 639905	8,25160	27,7948	19382 002602	1563	64
20	5	69897 000434	8,68589	28,2291	18708 664336	1538	65
21	4762	67778 070527	9,12018	28,6634	18045 606446	1515	66
22	4545	65757 731918	9,55448	29,0977	17392 519730	1493	67
23	4348	63827 216398	9,98877	29,5320	16749 108729	1471	68
24	4167	61978 875829	10,4231	29.9663	16115 090926	1449	69
25	4	60205 999133	10,8574	30,4006	15490 195999	1429	70
26	3846	58502 665203	11,2917	30,8349	14874 165128	1408	71
27	3704	56863 623584	11,7260	31,2692	14266 750357	1389	72
28	3571	55284 196866	12,1602	31,7035	13667 713988	1370	73
29	3448	53760 200210	12,5945	32,1378	13076 828027	1351	74
30	3333	52287 874528	13,0288	32,5721	12993 873661	1333	75
31	3226	50863 830617	13,4631	33,0064	11918 640772	1316	76
32	3125	49485 002168	13,8974	33,4407	11350 927483	1299	77
33	3030	48148 606012	14,3317	33,8750	10790 539731	1282	78
34	2941	46852 108296	14,7660	34,3093	10237 290871	1266	79
35	2857	45593 195565	16,2003	34,7436	09691 001301	125	80
36	2778	44369 749923	15,6346	35,1779	09151 498112	1235	81
37	2703	43179 827593	16,0689	35,6121	08618 614762	1220	82
38	2632	42021 640338	16,5032	36,0464	08092 190762	1205	83
39	2564	40893 539297	16,9375	36,4807	07572 071394	1190	84
40	25	39794 000867	17,3718	36,9150	07058 107429	1176	85
41	2439	38721 614328	17,8061	37,3493	06550 154876	1163	86
42	2381	37675 070960	18,2404	37,7836	06048 074738	1149	87
43	2326	36653 154442	18,6747	38,2179	05551 732785	1136	88
44	2273	35654 732351	19,1090	38,6522	05060 999336	1124	89
45	2222	34678 748622	19,5433	39,0865	04575 749056	1111	90
46	2174	33724 216832	19,9775	39,5208	04095 860768	1099	91
47	2128	32790 214206	20,4118	39,9551	03621 217265	1087	92
48	2083	31875 876262	20,8461	40,3894	03151 705145	1075	93
49	2041	30980 391997	21,2804	40,8237	02687 214640	1064	94
50	2	30102 999566	21,7147	41,2580	02227 639471	1053	95
51	1961	29242 982390	22,1490	41,6923	01772 876696	1042	96
52	1923	28399 665637	22,5833	42,1266	01322 826573	1031	97
53	1887	27572 413040	23,0176	42,5609	00877 392431	1020	98
54	1852	26760 624018	23,4519	42,9952	00436 480540	1010	99
55	1818	25963 731051	23,8862	43,4294	0	1	100

TABLE IX.

RECHERCHE DU NOMBRE

a	$\log a$	$\frac{\theta}{k}$	$\frac{\theta}{k}$	$\log a$	a
11	04139 268516	25,3284	128,945	74818 802701	56
12	07918 124605	27,6310	131,247	75587 485567	57
13	11394 335231	29,9336	133,550	76342 799356	58
14	14612 803568	32,2362	135,853	77085 201164	59
15	17609 125906	34,5388	138,155	77815 125038	60
16	20411 998266	36,8414	140,458	78532 983501	61
17	23044 892138	39,1439	142,760	79239 168950	62
18	25527 250510	41,4465	145,063	79934 054945	63
19	27875 360095	43,7491	147,365	80617 997398	64
20	20102 999566	46,0517	149,668	81291 335664	65
21	32221 929473	48,3543	151,971	81954 393554	66
22	34242 268082	50,6569	154,273	82607 480270	67
23	36172 783602	52,9595	156,576	83250 891271	68
24	38021 124171	55,2620	158,878	83884 909074	69
25	39794 000867	57,5646	161,181	84509 804001	70
26	41497 334797	59,8672	163,484	85125 834872	71
27	43136 376416	62,1698	165,786	85733 249643	72
28	44715 803134	64,4724	168,089	86332 286012	73
29	46239 799790	66,7750	170,391	86923 171973	74
30	47712 125472	69,0776	172,694	87506 126339	75
31	49136 169383	71,3801	174,996	88081 359228	76
32	50514 997832	73,6827	177,299	88649 072517	77
33	51851 393988	75,9853	179,602	89209 460269	78
34	53147 891704	78,2879	181,904	89762 709129	79
35	54406 804435	80,5905	184,207	90308 998699	80
36	55630 250077	82,8931	186,509	90848 501888	81
37	56820 172407	85,1956	188,812	91381 385238	82
38	57978 359662	87,4982	191,115	91907 809238	83
39	59106 460703	89,8008	193,417	92427 928606	84
40	60205 999133	92,1034	195,720	92941 892571	85
41	61278 385672	94,4060	198,022	93449 845124	86
42	62324 929040	96,7086	200,325	93951 925262	87
43	63346 845558	99,0112	202,627	94448 267215	88
44	64345 267649	101,314	204,930	94939 000664	89
45	65321 251378	103,616	207,233	95424 250944	90
46	66275 783168	105,919	209,535	95904 139232	91
47	67209 785794	108,221	211,838	96378 782735	92
48	68124 123738	110,524	214,140	96848 294855	93
49	69019 608003	112,827	216,443	97312 785360	94
50	69897 000434	115,129	218,746	97772 360529	95
51	70757 017610	117,432	221,048	98227 123304	96
52	71600 334363	119,734	223,351	98677 173427	97
53	72427 586960	122,037	225,653	99122 607569	98
54	73239 375982	124,340	227,956	99563 519460	99
55	74036 268949	126,642	230,259	0	100

TABLE X.

RECHERCHE DU LOGARITHME		RECHERCHE DU NOMBRE	
$1-\theta$	$-\log(1-\theta)$	$(1+\theta)$	$\log(1+\theta)$
$\bar{1},09$	0,04095 86076 8	1,09	0,03742 64979 4
8	3621 21726 5	8	3342 37554 9
7	3151 70514 5	7	2938 37776 9
6	2687 21464 0	6	2530 58652 6
5	2227 63947 1	5	2118 92990 7
4	1772 87669 6	4	1703 33393 0
3	1322 82657 3	3	1283 72247 1
2	$0,0^{2}$ 877 39243 1	2	$0,0^{2}$ 860 01717 6
1	436 48054 0	1	432 13737 8
$\bar{1},0^{2}9$	392 63455 1	$1,0^{2}9$	389 11662 4
8	348 83278 5	8	346 05321 1
7	305 07515 0	7	302 94705 5
6	261 36156 0	6	259 79807 2
5	217 69192 5	5	216 60617 6
4	174 06615 8	4	173 37128 1
3	130 48416 9	3	130 09330 2
2	$0,0^{3}$ 86 94587 1	2	$0,0^{3}$ 86 77215 3
1	43 45117 7	1	43 40774 8
$\bar{0},0^{3}9$	39 10410 3	$1,0^{3}9$	39 06892 5
8	34 75746 3	8	34 73966 9
7	30 41125 9	7	30 38997 8
6	26 06548 9	6	26 04985 5
5	21 72015 5	5	21 70929 7
4	17 37525 5	4	17 36830 6
2	13 03078 9	3	13 02688 1
2	$0,0^{4}$ 8 68675 8	2	$0,0^{4}$ 8 68502 1
1	4 34316 2	1	4 34272 8
$\bar{1},0^{4}9$	3 90882 6	$1,0^{4}9$	3 90847 4
8	3 47449 5	8	3 47421 7
7	3 04016 8	7	3 03995 5
6	2 60584 5	6	2 60568 9
5	2 17152 7	5	2 17141 8
4	1 73721 3	4	1 73714 3
3	1 30290 3	3	1 30286 4
2	$0,0^{5}$ 86859 8	2	$0,0^{5}$ 86858 0
1	43429 7	1	43429 2
$\bar{1},0^{5}9$	39086 7	$1,0^{5}9$	39086 3
8	34743 7	8	34743 4
7	30400 7	7	30400 5
6	26057 7	6	26057 6
5	21714 8	5	21714 7
4	17371 8	4	17371 7
3	13028 9	3	13028 8
2	$0,0^{6}$ 8685 9	2	8685 9
1	4342 9	1	4342 9

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.